



Universidad
Politécnica
de Cartagena



industriales
etsii UPCT

Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga en engranajes cilíndricos rectos mediante el método de los elementos finitos

Titulación: Ingeniero Técnico Industrial, Especialidad en Mecánica

Alumno/a: M^a Cristina Gómez Navarro
Director/a/s: Ignacio González Pérez
Alfonso Fuentes Aznar

Cartagena, 1 de marzo de 2012

Agradecimientos:

Quiero agradecer a Ignacio González Pérez por su ayuda durante estos meses, ya que sin la cual no hubiese sido posible el desarrollo de mi proyecto fin de carrera.

A Alfonso Fuentes Aznar y al Departamento de Ingeniería Mecánica por los medios ofrecidos para la elaboración de este proyecto.

A mi madre por su continuo apoyo, a mi padre por su ayuda, a mis cuatro abuelos por su cariño, a mis hermanos , a mi tita Isa y a mi padrino Paco.

A mis amigos de siempre y a los que he ido encontrando por el camino Vero, Vicky, M^a José, Eva, Sandra, Mari, Roberto, Mari Paz, Celeste, mis crías y Toni, por los buenos momentos que he vivido junto a ellos , y por todo lo que han aportado en mi vida, y que espero que sigan haciendo.

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructura y planteamiento	4
2. Fundamentos teóricos	5
2.1. Introducción	5
2.2. Generación de la geometría	5
2.3. Generación del modelo de elementos finitos	11
2.4. Fundamentos de la norma ISO 6336	18
2.4.1. Introducción a la norma ISO 6336	18
2.4.2. Factores	18
2.4.3. Factor $K_{H\beta}$	19
2.4.4. Determinación del factor $K_{H\beta}$ mediante el Método C	20
3. Metodología	32
3.1. Cálculo de $K_{H\beta}$ mediante el método de los elementos finitos	32
3.2. Cálculo de $K_{H\beta}$ mediante el Método C de la norma ISO	35
4. Resultados	37
4.1. Casos del grupo A	37
4.1.1. Análisis de la posición relativa de los engranajes en los ejes	38
4.1.2. Análisis de la variación del par torsor aplicado	43
4.1.3. Análisis de la variación del ancho de cara del diente	45
4.1.4. Análisis de la variación del diámetro del eje del piñón	47
4.1.5. Análisis de la posición relativa de los engranajes en voladizo	49
4.2. Casos del grupo B	55
4.2.1. Análisis de la posición relativa de los engranajes en los ejes	55
4.2.2. Análisis de la posición relativa de los engranajes en voladizo	60

4.3. Casos del grupo C	64
4.3.1. Análisis de la posición relativa de los engranajes en los ejes	64
4.3.2. Análisis de la posición relativa de los engranajes en voladizo	70
5. Conclusiones	75

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

Si bien las transmisiones por engranajes son tan antiguas como la palanca, la polea, la rueda y otros mecanismos similares, en realidad no fue hasta mediados del siglo XVIII cuando se empezaron a establecer las bases de la teoría de engranajes y el desarrollo de la tecnología de fabricación y diseño de los mismos.

En las primeras transmisiones, la relación de transmisión dada como cociente de los números de dientes de piñón y rueda se satisface sólo si se considera el cociente de las velocidades angulares medias $\omega_m^{(1)}$ del piñón y $\omega_m^{(2)}$ de la rueda

$$\frac{\omega_m^{(1)}}{\omega_m^{(2)}} = \frac{N_2}{N_1} \quad (1.1.1)$$

donde N_1 y N_2 son los números de dientes del piñón y de la rueda, respectivamente. Esta relación se deduce de la condición de engrane consecutivo de las parejas de dientes. Los primeros dientes utilizados eran bastones o palos cortos que entran en contacto de forma consecutiva, satisfaciendo la relación dada en (1.1.1).

Sin embargo, la relación de transmisión instantánea m_{12} dada por el cociente de las velocidades angulares instantáneas $\omega^{(1)}$ del piñón y $\omega^{(2)}$ de la rueda, es decir,

$$m_{12} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}} \quad (1.1.2)$$

es en general distinta de la relación dada por (1.1.1). Tales transmisiones estaban pensadas para transmitir movimiento con potencias muy bajas. Desde entonces hasta el siglo XIX se han utilizado distintos tipos de dientes, con perfiles triangulares, de círculo, etc., pero en todas estas transmisiones la relación de transmisión instantánea m_{12} es en general distinta de la relación dada por (1.1.1), por lo que la transmisión de potencia y movimiento no es uniforme y continua.

Introducido el concepto de superficies conjugadas, las transmisiones por engranajes podían satisfacer el requerimiento de $m_{12} = N_2/N_1$ en cada instante del ciclo de engrane y con ello mejorar considerablemente el funcionamiento de la transmisión. La teoría moderna de engranajes establece las condiciones necesarias y suficientes de existencia de superficies conjugadas. En realidad, la acción conjugada no significa que la relación m_{12} sea constante en cada instante, sino que puede venir dada por una función definida por el diseñador. Un ejemplo lo constituyen los engranajes no cilíndricos.

La variedad de tipos de superficies conjugadas es tan amplia como la imaginación del ser humano. Sin embargo, ha sido la superficie cuya curva base es una evolvente de círculo la que ha tenido más aceptación y uso generalizado en la industria por sus numerosas ventajas.

En engranajes rectos y helicoidales con ejes paralelos, el contacto entre las superficies conjugadas con perfil de evolvente es lineal como se observa en las Figuras 1.1.1(a) y (b) para el caso de engranajes rectos y helicoidales, respectivamente. Las líneas de contacto en el caso del engranaje helicoidal son rectas tangentes al cilindro base de la evolvente mientras que en el engranaje recto son paralelas al eje de dicho cilindro.

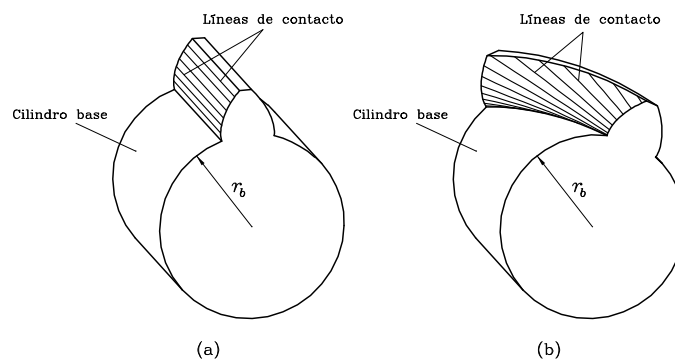


Figura 1.1.1: Tipos de contacto en engranajes: (a) rectos con ejes paralelos y (b) helicoidales con ejes paralelos.

Si bien la acción conjugada representa unas condiciones ideales de funcionamiento, lo cierto es que las condiciones teóricas definidas en la generación de las superficies nunca se dan en el funcionamiento real de la transmisión. Los errores de alineación de la transmisión, de fabricación de las superficies, la propia deformación elástica de las mismas como consecuencia de la carga aplicada, o la deflexión de los ejes, son los responsables de que la acción entre las superficies deje, en la mayoría de los casos, de ser conjugada. La relación m_{12} es entonces distinta de (1.1.1).

Los errores de alineación, fabricación y la deformación elástica de las superficies y de los ejes que soportan los engranajes son los responsables de que la posición angular de la rueda respecto al piñón difiera de la posición teórica que debería tener si existiera acción conjugada. A este error en la posición angular se le denomina error de transmisión. Matemáticamente, el error en la posición

angular de la rueda viene dado como

$$\Delta\phi_2(\phi_1) = \left(\phi_2(\phi_1) - \phi_2(\phi_1^{(0)}) \right) - \frac{N_1}{N_2} \left(\phi_1 - \phi_1^{(0)} \right) \quad (1.1.3)$$

donde ϕ_2 indica la posición angular de la rueda, ϕ_1 la posición angular del piñón, y $\phi_1^{(0)}$ un valor inicial de referencia del ángulo de giro del piñón.

Además de la aparición de los errores de transmisión, otra de las consecuencias de que la acción entre las superficies de los dientes deje de ser conjugada es la distribución no uniforme de la carga sobre las superficies de los dientes. Esta consecuencia es tenida en cuenta por las normas de diseño de engranajes a través de distintos factores cuyo propósito es estimar la capacidad de carga que puede tener una transmisión por engranajes. Uno de estos factores tiene en cuenta la distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho del diente y es conocido como factor de distribución longitudinal de la carga.

La capacidad de carga que puede transmitir una transmisión por engranajes viene limitada principalmente por dos tipos de problemas: el problema de la picadura o desconchado de las superficies de los dientes tras muchos ciclos de carga, y el problema de la rotura del diente en su base. El primero es siempre un problema de fatiga superficial mientras que el segundo puede deberse a un problema de fatiga o a un problema de sobrecarga. En cualquiera de los dos problemas que limitan la capacidad de carga de una transmisión, el factor de distribución longitudinal de la carga tiene un papel importante porque un factor elevado lleva a una limitación importante en la capacidad de carga de las transmisiones por engranajes.

1.2. Objetivos

El objetivo principal del presente proyecto fin de carrera es calcular el factor de distribución longitudinal de la carga en engranajes cilíndricos rectos mediante el método de los elementos finitos teniendo en cuenta la deflexión de los ejes que soportan los engranajes y la deformación torsional de las superficies de contacto y de los cuerpos de los engranajes. La inclusión en este estudio de los ejes en los modelos de elementos finitos y la consideración de la deformación torsional de las superficies de contacto y de los cuerpos de los engranajes representan un avance importante en el estudio de la capacidad de carga de las transmisiones por engranajes cilíndricos rectos.

Los objetivos particulares que se plantean en el presente proyecto fin de carrera son los siguientes:

- (1) Desarrollo de un modelo de elementos finitos de transmisiones por engranajes cilíndricos rectos que tenga en cuenta la deflexión de los ejes y la deformación torsional de las superficies de contacto y de los cuerpos de los engranajes.
- (2) Aplicación del método de los elementos finitos en engranajes cilíndricos rectos para investigar los efectos de la deflexión de los ejes y la deformación torsional elástica de las superficies de

contacto y de los cuerpos de los engranajes en la distribución no uniforme de la carga sobre los dientes.

- (3) Investigación de la influencia de la posición de los engranajes sobre los ejes en la formación de la huella de contacto y en el factor de distribución longitudinal de la carga.
- (4) Aplicación de la norma ISO - Método C para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga en engranajes cilíndricos rectos y su comparación con el obtenido con el modelo propuesto de elementos finitos.

1.3. Estructura y planteamiento

El presente proyecto fin de carrera se ha estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1. Introducción y objetivos.
- Capítulo 2. Fundamentos teóricos.
- Capítulo 3. Metodología.
- Capítulo 4. Resultados.
- Capítulo 5. Conclusiones.

En el Capítulo 1 se ha realizado una introducción del tema a analizar a lo largo del presente proyecto fin de carrera y se han planteado los objetivos a desarrollar en el mismo.

En el Capítulo 2 se introducen los fundamentos teóricos para la generación de la geometría de los dientes y la construcción del modelo de elementos finitos. Se describen además los principios e hipótesis del Método C que desarrolla la norma ISO para la obtención del factor de distribución longitudinal de la carga.

En el Capítulo 3 se presentan los pasos seguidos para la obtención del factor de distribución longitudinal de la carga según el método de los elementos finitos. A continuación, se introduce la metodología seguida en la norma ISO - Método C para la obtención del factor en estudio.

En el Capítulo 4 se analizan varios casos de diseño en los que se varía la posición relativa de los engranajes en los ejes, el valor del par torsor transmitido, el ancho de la cara del diente, el diámetro del eje del piñón y la posición en voladizo de los engranajes. Para todos estos casos se ha representado la huella de contacto y se ha calculado el factor de distribución longitudinal de la carga a partir del modelo de elementos finitos y de la norma ISO - Método C.

En el Capítulo 5 se exponen las principales conclusiones del presente proyecto fin de carrera.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Introducción

En el presente capítulo se presentan los fundamentos teóricos de la teoría de engranajes moderna [1] que permite la obtención de la geometría de la superficie de los dientes. Dicha geometría sirve de base para la determinación de los volúmenes de los cuerpos de los engranajes que a continuación serán utilizados en la generación del modelo de elementos finitos.

En la generación del modelo se explican los pasos seguidos en el mallado de los cuerpos de los engranajes, la incorporación de los ejes al modelo y las condiciones de contorno aplicadas. Dicho modelo ha de permitir tener en cuenta la deflexión de los ejes y la deformación torsional elástica de las superficies de contacto y de los cuerpos de los engranajes en la distribución no uniforme de la carga.

Finalmente se describe detalladamente los principios y fundamentos de la norma ISO[2] para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga.

2.2. Generación de la geometría

En el proceso de diseño y generación de la geometría del engranaje se parte de la geometría de una cremallera, a la que se denomina cremallera de referencia (Fig. 2.2.1).

Cremallera de referencia. La Figura 2.2.1 representa la geometría de la cremallera de referencia donde α es el ángulo de presión.

El segmento $l = |\overline{O_t O_d}|$ viene dado por

$$l = \frac{\pi m}{4} \cos \alpha \quad (2.2.1)$$

donde m es el módulo.

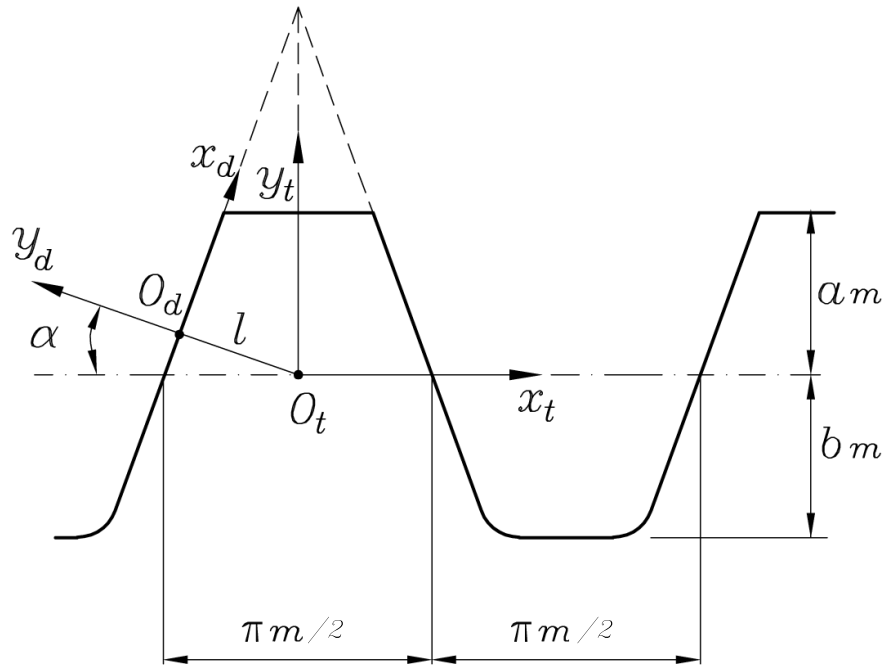


Figura 2.2.1: Geometría de la cremallera de referencia.

La Figura 2.2.2 muestra la definición del perfil de la cremallera de referencia que tallará el lado conductor del engranaje. Para la definición de los perfiles rectos se utiliza el sistema de coordenadas S_d (O_d, x_d, y_d, z_d) (Fig. 2.2.1) para el lado conductor. Un punto cualquiera de la superficie de la cremallera de referencia vendrá dado por los parámetros u_d y θ_d , siendo u_d el parámetro de posición sobre el perfil con origen en el punto O_d , y θ_d el parámetro a lo largo del ancho de cara en la dirección longitudinal paralela al eje z_d (no mostrado en la Fig. 2.2.1).

La superficie de la cremallera de referencia Σ_c que genera el lado conductor de los dientes del engranaje en el sistema de coordenadas S_d (Fig. 2.2.2), viene dada por

$$\mathbf{r}_d^{(a)} = \begin{bmatrix} u_d \\ 0 \\ \theta_d \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

El superíndice (a) en la ecuación (2.2.2) hace referencia al perfil activo del diente, utilizándose el superíndice (b) posteriormente para definir el perfil de la base del diente. Una definición similar se puede utilizar para definir la superficie del otro lado de la cremallera de referencia.

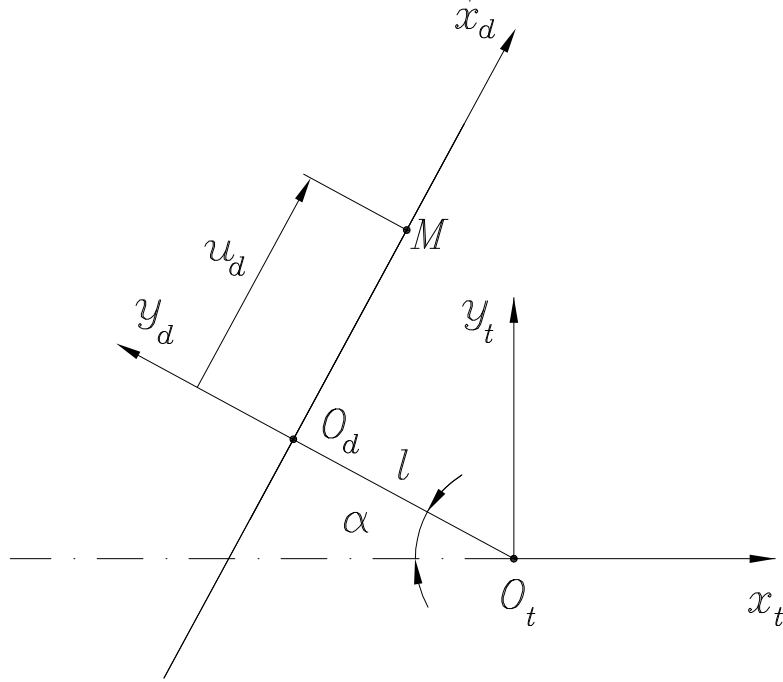


Figura 2.2.2: Definición del perfil recto de la cremallera de referencia.

La normal unitaria viene dada en el sistema S_d por

$$\mathbf{n}_d^{(a)} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_d^{(a)}}{\partial \theta_d} \times \frac{\partial \mathbf{r}_d^{(a)}}{\partial u_d} \right) \frac{1}{|\mathbf{n}_d^{(a)}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

La superficie y la normal unitaria de la cremallera de referencia, en el sistema solidario a la misma S_t (Fig. 2.2.2), vienen dadas por $\mathbf{r}_t = \mathbf{M}_{td}\mathbf{r}_d$ y $\mathbf{n}_t = \mathbf{L}_{td}\mathbf{n}_d$, siendo \mathbf{M}_{td} la matriz de transformación de coordenadas entre los sistemas S_d y S_t ,

$$\mathbf{M}_{td} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & -l \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

y \mathbf{L}_{td} la submatriz 3×3 que se obtiene eliminando la última fila y la última columna de la matriz

\mathbf{M}_{td} . Se tiene entonces,

$$\mathbf{r}_t^{(a)}(u_d, \theta_d) = \begin{bmatrix} u_d \sin \alpha - l \cos \alpha \\ u_d \cos \alpha + l \sin \alpha \\ \theta_d \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{n}_t^{(a)}(u_d) = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

La Figura 2.2.3 muestra la definición del perfil de acuerdo de cabeza de la cremallera de referencia. Los parámetros de un punto cualquiera N de la superficie de acuerdo son λ_d y θ_d . El primero se mide en la dirección del perfil y tiene su origen en la horizontal que pasa por el centro de curvatura C del perfil. El parámetro θ_d es el mismo que el utilizado anteriormente.

La superficie de acuerdo de cabeza de la cremallera de referencia $\Sigma_c^{(b)}$ viene dada, en el sistema de coordenadas S_t , por el vector $\mathbf{r}_t^{(b)}(\lambda_d, \theta_d)$

$$\mathbf{r}_t^{(b)}(\lambda_d, \theta_d) = \begin{bmatrix} x_C + \rho \cos \lambda_d \\ y_C - \rho \sin \lambda_d \\ \theta_d \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

donde ρ es el radio del acuerdo y (x_C, y_C) son las coordenadas de su centro en el sistema S_t .

La normal unitaria viene dada en el sistema S_t por

$$\mathbf{n}_t^{(b)}(\lambda_d) = \begin{bmatrix} -\cos \lambda_d \\ \sin \lambda_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Las coordenadas del centro del arco de circunferencia que define el acuerdo de cabeza vienen definidas como $x_C = -\xi$, $y_C = -bm + \rho$ (Fig. 2.2.3), siendo ξ el parámetro que debe garantizar la tangencia del perfil recto y del perfil de acuerdo. Planteando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_t^{(a)} \mathbf{i} &= \mathbf{r}_t^{(b)} \mathbf{i} \\ \mathbf{r}_t^{(a)} \mathbf{j} &= \mathbf{r}_t^{(b)} \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_t^{(a)}}{\partial u_d} \mathbf{j} &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}_t^{(a)}}{\partial u_d} \right| \cos \lambda_T \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

se pueden obtener los valores de ξ , λ_T y u_T , siendo λ_T y u_T los valores de los parámetros λ_d y u_d respectivamente en el punto de entronque T con el perfil recto.

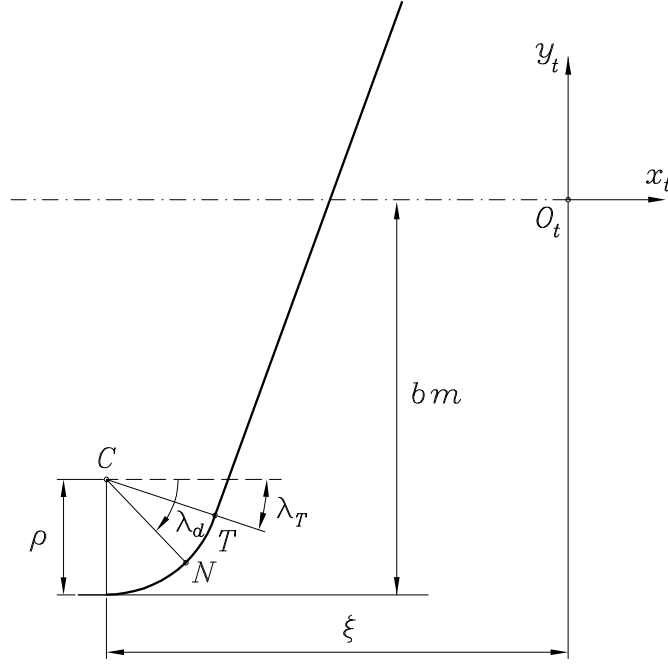


Figura 2.2.3: Definición del perfil de acuerdo de cabeza de la cremallera de referencia.

Generación del piñón. En el proceso de generación del piñón a partir de la cremallera de referencia, el plano $y_t = -\chi_1 m$ y el cilindro de radio r_{p1} representan los axoides del movimiento (Fig. 2.2.4), siendo χ_1 el coeficiente de desplazamiento de herramienta y r_{p1} el radio primitivo del piñón. Los sistemas de referencia utilizados son: S_t solidario a la cremallera, S_p solidario al piñón y S_f como sistema fijo. La superficie del piñón viene dada por

$$\mathbf{r}_p^{(a)}(u_d, \theta_d, \phi_p) = \mathbf{M}_{pf}(\phi_p) \mathbf{M}_{ft}(\phi_p) \mathbf{r}_t^{(a)}(u_d, \theta_d) \quad (2.2.10)$$

$$f_{pt}^{(a)}(u_d, \phi_p) = 0 \quad (2.2.11)$$

y la superficie del perfil de la base,

$$\mathbf{r}_p^{(b)}(\lambda_d, \theta_d, \phi_p) = \mathbf{M}_{pf}(\phi_p) \mathbf{M}_{ft}(\phi_p) \mathbf{r}_t^{(b)}(\lambda_d, \theta_d) \quad (2.2.12)$$

$$f_{pt}^{(b)}(\lambda_d, \phi_p) = 0 \quad (2.2.13)$$

donde

$$\mathbf{M}_{ft} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_{p1}\phi_p \\ 0 & 1 & 0 & r_{p1} + \chi_1 m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{M}_{pf} = \begin{bmatrix} \cos \phi_p & \sin \phi_p & 0 & 0 \\ -\sin \phi_p & \cos \phi_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

siendo ϕ_p el parámetro generalizado del movimiento.

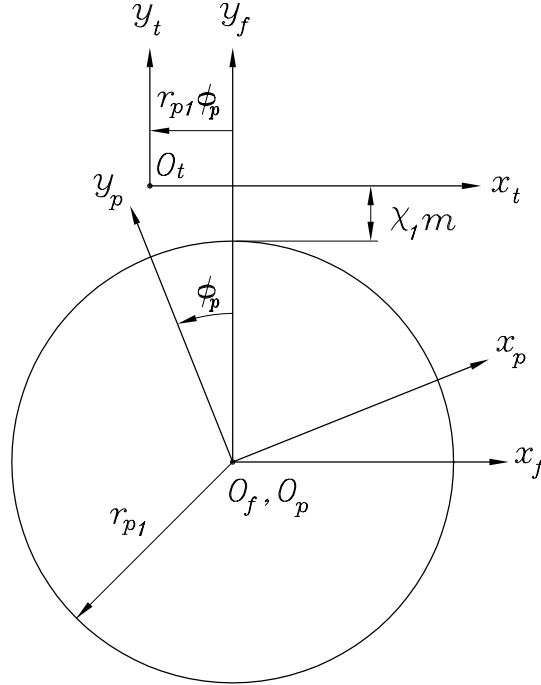


Figura 2.2.4: Sistema de coordenadas utilizado en la generación del piñón de referencia.

Las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.12) representan la familia de superficies de la cremallera correspondientes al perfil recto y al perfil de base respectivamente en el sistema S_p . Las ecuaciones (2.2.11) y (2.2.13) constituyen las ecuaciones de engrane. Considerando simultáneamente las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.11) para el perfil recto, y (2.2.12) y (2.2.13) para el perfil de base, se tiene la superficie Σ_p del piñón a través de tres parámetros relacionados.

Las ecuaciones de engrane vienen dadas por

$$f_{pt}^{(a)} = (-\cos \alpha_d)\chi_1 m + (\sin \alpha_d)r_{p1}\phi_p - u_d \quad (2.2.16)$$

$$f_{pt}^{(b)} = (y_C + \chi_1 m) \cos \lambda_d + (x_C - r_{p1} \phi_p) \operatorname{sen} \lambda_d \quad (2.2.17)$$

Por otro lado, la normal unitaria a la superficie del piñón Σ_p viene dada para la parte activa del perfil, por

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_p^{(a)}(u_d, \phi_p) &= \mathbf{L}_{pf}(\phi_p) \mathbf{L}_{ft} \mathbf{n}_t^{(a)}(u_d) \\ f_{pt}^{(a)}(u_d, \phi_p) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

y para el perfil de base,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_p^{(b)}(\lambda_d, \phi_p) &= \mathbf{L}_{pf}(\phi_p) \mathbf{L}_{ft} \mathbf{n}_t^{(b)}(u_d) \\ f_{pt}^{(b)}(\lambda_d, \phi_p) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

De las ecuaciones de engrane (2.2.16) y (2.2.17) es posible obtener ϕ_p como una función del parámetro u_d ó λ_d respectivamente. Por tanto, las normales pueden quedar definidas como $\mathbf{n}_p^{(a)}(u_d)$ y $\mathbf{n}_p^{(b)}(\lambda_d)$.

Generación de la rueda. El proceso de generación de la rueda es idéntico al del piñón sin más que cambiar el radio primitivo y el número de dientes.

2.3. Generación del modelo de elementos finitos

El método de los elementos finitos [3] es utilizado comúnmente en el análisis y diseño de las transmisiones por engranajes para la determinación de las tensiones de contacto entre superficies de los dientes y de flexión en la base de los dientes.

La mayoría de los análisis por elementos finitos de las transmisiones por engranajes que se pueden encontrar en la bibliografía consideran únicamente el mallado de los dientes de piñón y rueda [4], [5], [6]. Los modelos de los dientes de piñón y rueda son entonces montados en posiciones previamente determinadas por un algoritmo de determinación de la posición de contacto (*Tooth Contact Analysis* en la terminología anglosajona).

La generación automática y parametrizada de los modelos de elementos finitos de transmisiones por engranajes a partir de las superficies de los dientes generadas computacionalmente a partir de las herramientas de corte fue propuesta en [7]. Dichos modelos consideran la porción del aro base bajo los dientes de piñón y rueda. La aplicación de las condiciones de contorno en estos modelos se realiza considerando superficies rígidas formadas por los nodos de las partes laterales e inferior del aro base rígidamente conectadas a nodos de referencia en los ejes de piñón y rueda. El par se aplica entonces al nodo de referencia de uno de los miembros de la transmisión, normalmente el piñón, mientras el otro nodo de referencia, normalmente el de la rueda, se bloquea. Las ventajas de este modelo son la simplicidad a la hora de aplicar la carga y que no es necesario ninguna hipótesis sobre distribución de carga en las superficies de los dientes.

En este proyecto se propone un modelo de elementos finitos de transmisiones por engranajes similar al representado en [7] al que se incorporan los ejes que soportan piñón y rueda. Dicho modelo permitirá tener en cuenta la deflexión de los ejes y la deformación torsional de las superficies de contacto en la formación de la huella de contacto y en las tensiones de contacto y flexión. La deformación torsional de las superficies de contacto puede tener cierta relevancia en la formación de la huella de contacto en algunos casos de diseño, especialmente si la relación entre el diámetro del eje y el diámetro primitivo es alta, o si la relación entre el ancho de cara y el diámetro primitivo es elevada. De hecho, las normas ISO 6336 [2] o AGMA 2011-D04 [8] consideran la deformación torsional en la determinación del factor de distribución longitudinal de la carga.

La Figura 2.3.1 muestra de manera esquemática el modelo mejorado de elementos finitos en el que se incluyen los volúmenes de los cuerpos de piñón y rueda, formados por tres dientes cada uno todavía sin mallar, y los ejes que los soportan. Los ejes en este modelo se consideran perfectamente alineados y apoyados por cojinetes donde es posible la deflexión.

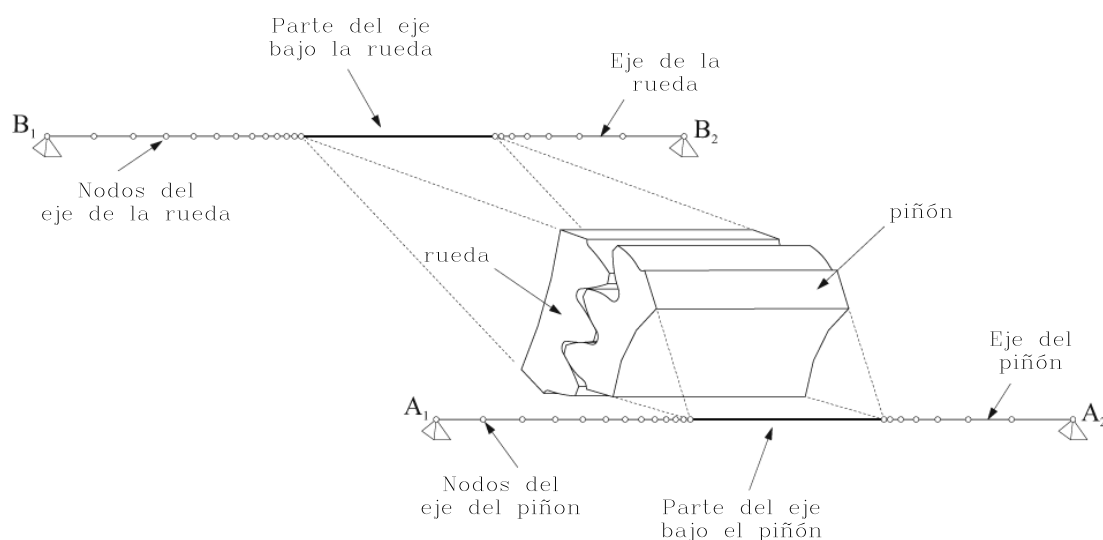


Figura 2.3.1: Representación esquemática del modelo mejorado de elementos finitos con los volúmenes de piñón y rueda y los ejes que los soportan.

La construcción del modelo de la transmisión para el análisis por elementos finitos se genera automáticamente mediante un programa de ordenador desarrollado para el diseño, generación, análisis del contacto y análisis tensional por elementos finitos de transmisiones por engranajes rectos. La generación del modelo de elementos finitos se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1. Se determina el modelo geométrico del diente a partir de las ecuaciones de las superficies que lo conforman. La Figura 2.3.2(a) muestra el volumen a modelizar correspondiente a un diente del piñón.

Paso 2. El volumen a modelizar de cada diente es dividido en seis subvolúmenes utilizando las

superficies intermedias auxiliares 1 a 6 según se observa en la Figura 2.3.2(b).

Paso 3. Se determinan analíticamente las coordenadas de los nodos en función del número de elementos previamente definidos en las direcciones longitudinal y del perfil del diente (Fig. 2.3.2(c)).

Paso 4. Se discretiza cada uno de los seis subvolúmenes en elementos finitos utilizando los nodos determinados en el paso anterior (Fig. 2.3.2(d)).

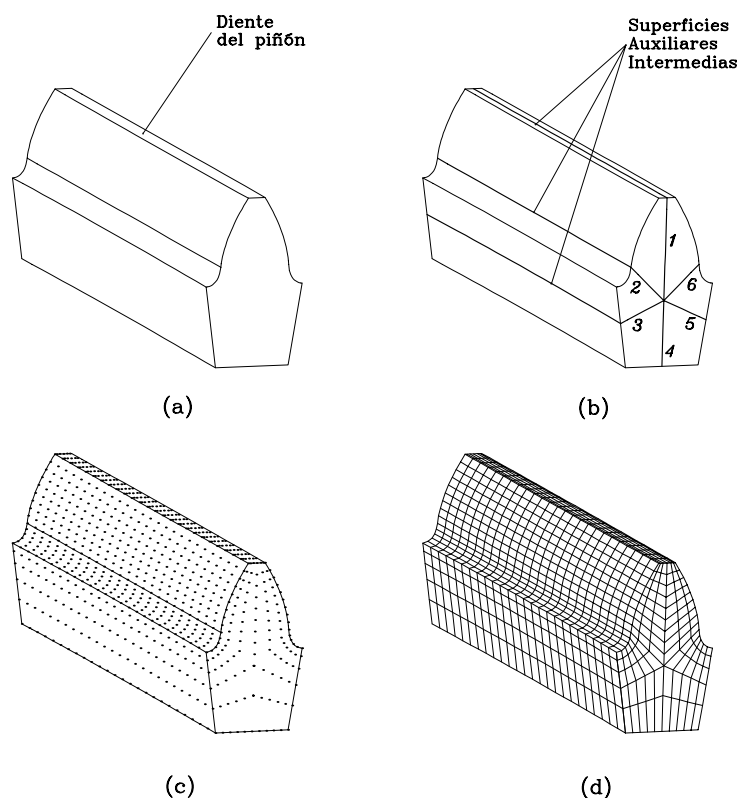


Figura 2.3.2: Ilustración de: (a) volumen del diente a modelizar, (b) superficies auxiliares intermedias, (c) determinación de los nodos, y (d) discretización del volumen por elementos finitos.

Paso 5. El mallado realizado en un diente se repite para los dientes adyacentes y se obtiene un volumen mallado de tres dientes para cada miembro de la transmisión, según se muestra en la Figura 2.3.3.

Las condiciones de contorno (véase la Fig. 2.3.4 para el caso de un modelo de tres dientes) de los modelos aplicados anteriormente [7] se establecían conforme a las siguientes ideas:

- (i) Se fijan los nodos a ambos lados y en la parte inferior del aro o cubo de la rueda, es decir, se restringen sus seis grados de libertad.
- (ii) Se define una superficie rígida formada por los nodos de ambos lados y de la parte inferior del aro base del piñón.

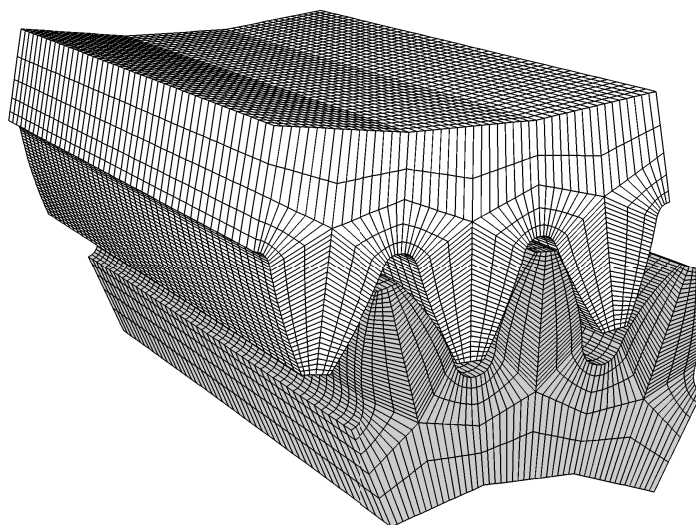


Figura 2.3.3: Modelo de elementos finitos de tres pares de dientes.

- (iii) Se define además el nodo N en el eje del piñón como punto de referencia de la superficie rígida. El nodo de referencia N y la superficie rígida constituyen un sólido rígido.
- (iv) Se establece como único grado de libertad del nodo N el giro en torno al eje del piñón, estando los restantes cinco grados de libertad restringidos a cero. La aplicación de un par T según el grado de libertad libre del nodo N permite transmitir dicho par al modelo del piñón a través de la superficie rígida.

Con el nuevo modelo propuesto, las condiciones de contorno se aplican de forma diferente.

Paso 6. Los ejes de piñón y rueda se malla mediante elementos barra lineales (véase la Fig. 2.3.1). La sección transversal de dichos elementos barra se define como una sección circular de diferente diámetro según que el elemento barra pertenezca al eje o al cuerpo del engranaje (véase la Fig. 2.3.5). La disposición de los nodos en los ejes de piñón y rueda se realiza según una progresión geométrica para aumentar gradualmente el tamaño de los elementos barra desde los engranajes a los apoyos y reducir, al mismo tiempo, el número de nodos en los ejes.

Paso 7. Los desplazamientos en los apoyos A_1 , A_2 , B_1 , y B_2 (véase la Fig. 2.3.1) están restringidos, permitiendo únicamente las deflexiones de los ejes. Un par T es aplicado en el apoyo A_1 del eje del piñón mientras el giro en el apoyo B_2 del eje de la rueda está restringido.

Paso 8. La Figura 2.3.6 muestra dos tipos de condiciones de contorno entre el piñón (o rueda) y la porción del eje que lo soporta:

- (a) El modelo representado en la Fig. 2.3.6(a) muestra un grupo de bordes rígidos independientes alrededor del aro base del engranaje. Dichos bordes rígidos están rígidamente conectados a

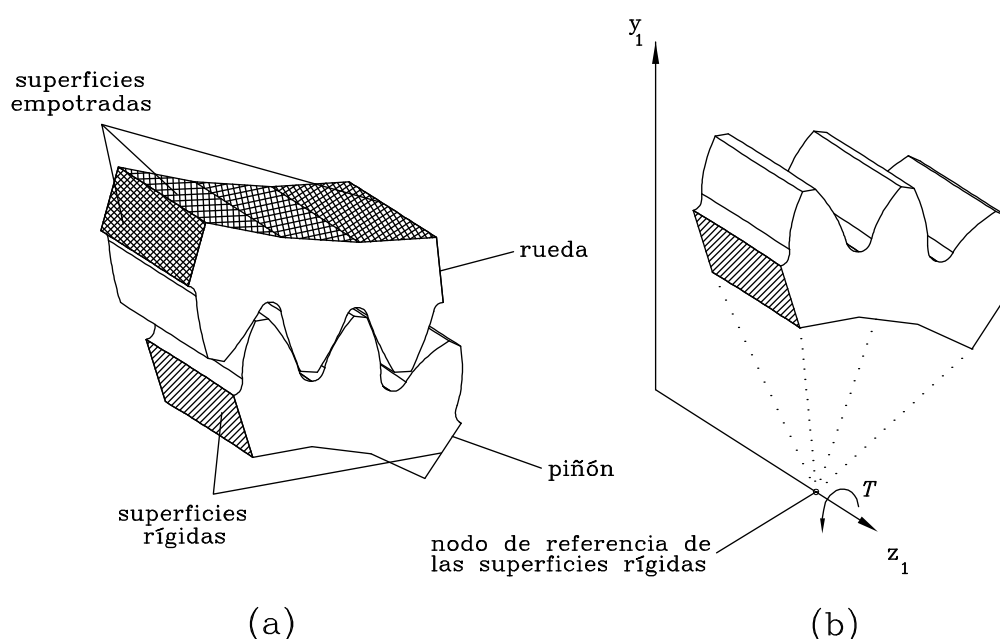


Figura 2.3.4: Ilustración esquemática de: (a) condiciones de contorno en piñón y rueda, y (b) superficies rígidas para la aplicación de las condiciones de contorno en el piñón.

nodos de referencia independientes en el eje del engranaje. El número de bordes rígidos y de nodos de referencia es igual al número de nodos en la dirección longitudinal del volumen mallado del cuerpo del engranaje.

- (b) El modelo representado en la Fig.2.3.6(b) muestra una única superficie rígida alrededor del aro base del engranaje y que se encuentra rígidamente unida al nodo de referencia en el eje del engranaje.

Mientras que el modelo representado en la Fig. 2.3.6(a) permite la deformación torsional del cuerpo del engranaje cuando un par T es aplicado en el nodo A_1 , el modelo representado en la Fig.2.3.6(b) no permite dicha deformación torsional debido a la superficie rígida que rodea el aro base del cuerpo del engranaje.

Paso 9. El algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos utilizado [9] requiere la definición de las superficies de contacto. El procedimiento de construcción del modelo permite identificar automáticamente todos los elementos necesarios para la formación de dichas superficies. El tipo de elemento elegido es el *C3D8I* [9], un elemento paralelepípedo de ocho nodos lineal para los problemas de contacto.

Las principales características del modelo así construido son las siguientes:

- (a) El modelo de elementos finitos se puede determinar automáticamente para cualquier posición del piñón y de la rueda obtenida a través del análisis del contacto o TCA [1].

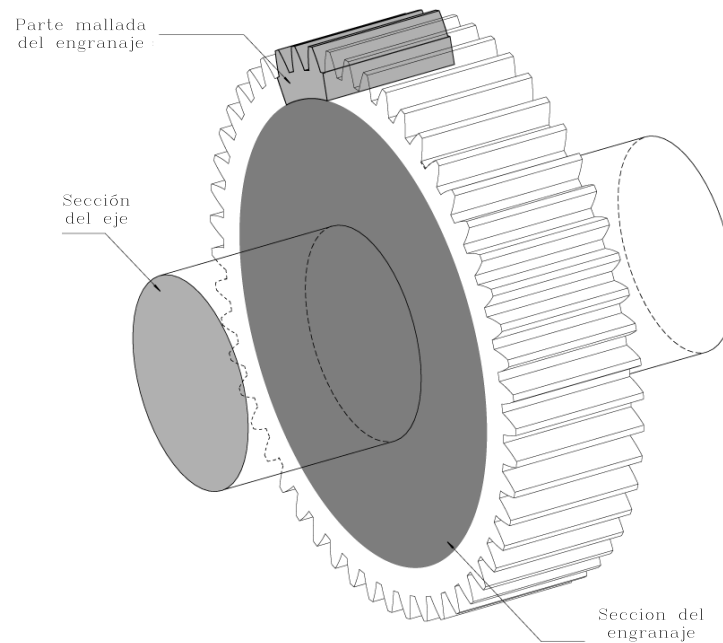


Figura 2.3.5: Secciones del eje y del engranaje consideradas en los elementos barra.

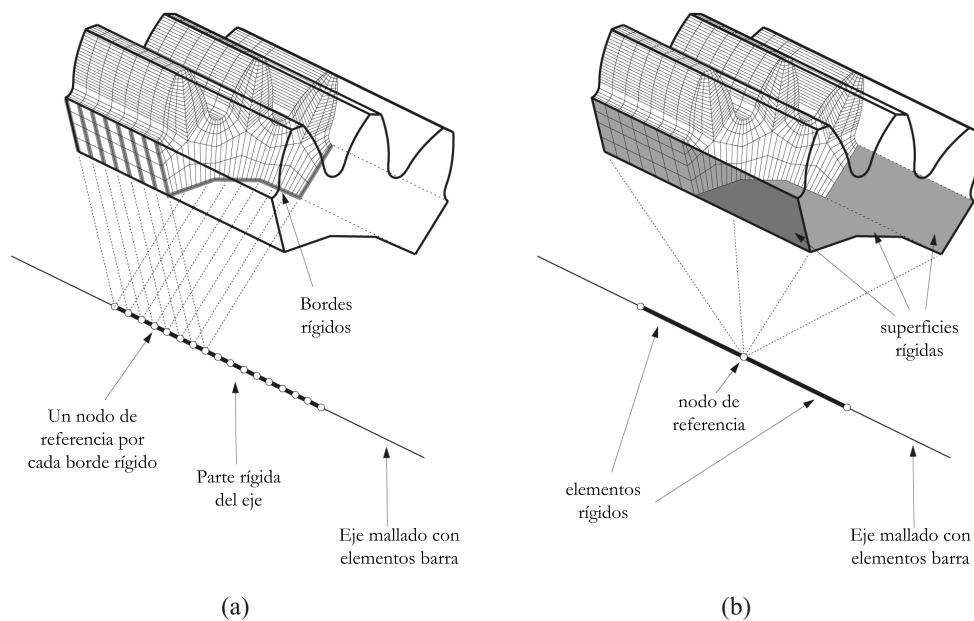


Figura 2.3.6: Detalles de las condiciones de contorno entre el aro base del engranaje y la porción del eje que lo soporta: (a) modelo donde es posible la deformación torsional del engranaje, (b) modelo donde no es posible la deformación torsional del engranaje.

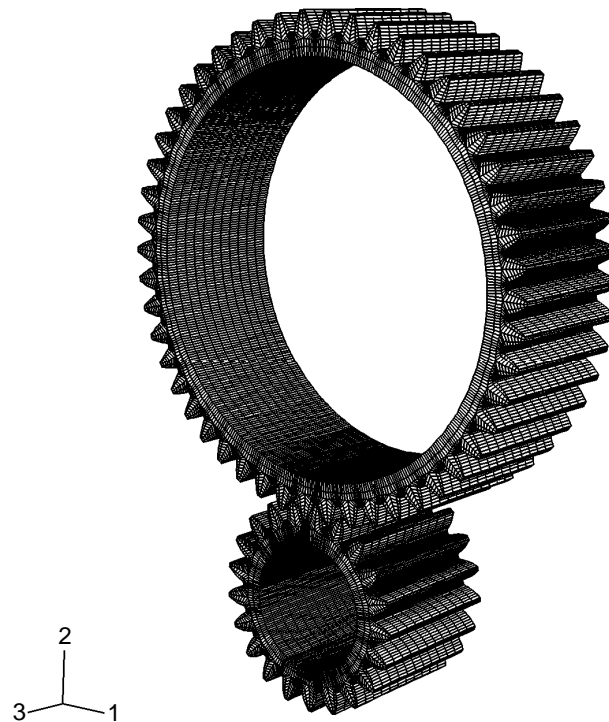


Figura 2.3.7: Modelo de elementos finitos de una transmisión completa de engranajes rectos.

- (b) La suposición de la distribución de la carga sobre la superficie del diente no es necesaria dado que el algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos [9] permite obtener el área de contacto y las tensiones de contacto y flexión a partir de la aplicación de un par torsor en el eje de giro del piñón mientras el eje de la rueda se mantiene fijo.
- (c) Se pueden obtener modelos de elementos finitos con cualquier número de dientes. Por ejemplo, la Figura 2.3.7 muestra el modelo de elementos finitos de la transmisión completa. Modelos de tres o cinco pares de dientes son más adecuados dada la capacidad de los ordenadores utilizados para el análisis tensional. En la Figura 2.3.3 se muestra el modelo de elementos finitos de tres pares de dientes que se utilizará en el presente proyecto.

2.4. Fundamentos de la norma ISO 6336

2.4.1. Introducción a la norma ISO 6336

La norma ISO 6336 [2] tiene como objetivo establecer un método para el cálculo de la resistencia a la picadura y a la flexión de engranajes cilíndricos, tanto de dientes rectos como helicoidales. Los procedimientos que se siguen a lo largo de esta norma están basados en ensayos y en estudios teóricos como los de Hirt, Strasser y Brossman. La norma ISO 6336 está destinada principalmente a diseñadores de engranajes con cierto grado de experiencia.

El formulario que aparece en la norma ISO 6336 no se podrá aplicar cuando tienen lugar las siguientes condiciones:

- Grado de recubrimiento inferior a 1 tanto para engranajes rectos como helicoidales.
- Grado de recubrimiento superior a 2.5 tanto para engranajes rectos como helicoidales.
- Interferencias en el engrane.
- Apuntamiento.
- Holgura cero.

Por otro lado, los cálculos obtenidos mediante la norma son bastante aceptables si los casos de estudio tienen ángulos de presión no superiores a 25° . En el caso de que esta condición no se dé se deberá recurrir a una comprobación de los resultados obtenidos mediante ensayos experimentales.

Así pues, el procedimiento de la norma ISO 6336-1 proporciona una serie de ecuaciones destinadas al cálculo de la capacidad de carga de los engranajes tanto de dientes rectos como helicoidales, mediante la introducción de una serie de factores.

Hay que señalar que las ecuaciones empleadas para realizar los cálculos no son aplicables para otros tipos de fallos que tienen lugar en los dientes de los engranajes tales como gripado, desgaste y deformación plástica.

2.4.2. Factores

Los factores que se presentan en la norma ISO 6336 pueden ser determinados por tres métodos: el método *A*, el método *B* y el método *C*.

Método A

Los factores pueden ser determinados de diversos modos ya sea mediante pruebas de carga a gran escala, o a través de la realización de medidas precisas, o según un análisis matemático completo de la transmisión de interés basado en experiencias industriales que han sido contrastadas previamente, o bien mediante una combinación de todo lo anterior.

Pese a la precisión del método, éste no es muy utilizado para el cálculo de los factores por las siguientes razones:

- El equipo de medición requerido no está disponible.
- Los detalles de las condiciones de funcionamiento son incompletos.
- Elevados costes de los análisis y las mediciones.

Método B

Los factores obtenidos mediante el método B son lo bastante precisos para su uso en la mayoría de las aplicaciones. Se trata de un método analítico cuya formulación se obtiene de datos empíricos resultantes de la evaluación de determinados sistemas de engranajes.

Método C

Se trata de un método en el que se realiza una serie de simplificaciones del Método B para la obtención de los factores. En este método es preciso realizar una valoración sobre si las hipótesis del método son compatibles con las condiciones de funcionamiento en cada caso.

2.4.3. Factor $K_{H\beta}$

Este factor tiene en cuenta el aumento de la presión de contacto de Hertz debido a una distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara del diente.

El grado de una distribución no uniforme a lo largo del ancho de cara del diente va a depender de los siguientes factores:

- El error en la fabricación de los dientes.
- El error en el paralelismo de los ejes de los engranajes.
- Las desviaciones elásticas de todos los componentes: dientes, ejes, cojinetes, caja, entre otros.
- La holgura en los cojinetes.
- El contacto hertziano y la deformación por flexión en la superficie del diente.
- Las deformaciones térmicas debidas a la temperatura de funcionamiento.
- La geometría de los engranajes que intervienen.
- Las deflexiones producidas por los efectos del rodaje.
- Las cargas adicionales en los ejes.

- Las desviaciones producidas por efectos centrífugos debidos a las velocidades de trabajo.

Como se ha comentado anteriormente, el factor $K_{H\beta}$ tiene en cuenta los efectos que se producen sobre la tensión de contacto en función de la distribución de la carga a lo largo del ancho de cara del diente, y por tanto, quedará definido como:

$$K_{H\beta} = \frac{\left(\frac{F}{b}\right)_{max}}{\left(\frac{F_m}{b}\right)} \quad (2.4.1)$$

donde $\left(\frac{F}{b}\right)_{max}$ es la carga máxima por unidad de ancho, $\left(\frac{F_m}{b}\right)$ la carga media por unidad de ancho y b es el ancho de cara del diente.

En el caso de que las desalineaciones causadas por las deformaciones existentes se compensen mediante modificaciones en las hélices de los engranajes, se puede alcanzar una distribución de la carga casi uniforme para unas condiciones de funcionamiento dadas, siempre que exista un alto grado de precisión en la fabricación de las piezas. Bajo estas circunstancias, el valor del factor de distribución longitudinal de carga tenderá a la unidad. En el caso contrario, se deberá calcular por uno de los métodos antes mencionados (Métodos A, B ó C).

2.4.4. Determinación del factor $K_{H\beta}$ mediante el Método C

El Método C presenta las siguientes hipótesis de cálculo:

- Las deflexiones de la rueda y del eje de la misma no se incluyen, ya que normalmente estos elementos son suficientemente rígidos. En el caso de que éstas deban ser tenidas en cuenta, se evaluarán independientemente y los valores correspondientes se incluirán en el error de distorsión por fabricación y montaje f_{ma} con el signo adecuado.
- Las deformaciones de la caja de engranajes y de los cojinetes tampoco son incluidos en los cálculos debido a que generalmente suelen ser suficientemente rígidos. En el caso de que sea necesario incluir en los cálculos dichas deformaciones, se deberá proceder del mismo modo que en el caso de la rueda y su eje.
- No se incluyen los efectos de la holgura en los cojinetes. Sólo en el caso de que ésta pueda provocar inclinaciones importantes en el eje, se deberá de evaluar de forma independiente e incluir los valores correspondientes en f_{ma} con el signo adecuado.
- Se considera que las deflexiones por torsión y flexión en el piñón con la distribución de carga real no difieren mucho de las determinadas para una carga distribuida uniformemente sobre el ancho del diente. Esta suposición es válida para valores de $K_{H\beta}$ bajos, ya que conforme aumenta su valor, este supuesto se hace menos válido.

- El eje del piñón tiene diámetro (d_{sh}) constante y es macizo. En el caso de que sea hueco se debe de cumplir que $\frac{d_{shi}}{d_{sh}} < 0,5$, donde d_{shi} es el diámetro interior del eje.
- El material del eje es acero.
- El efecto de cualquier carga adicional en el eje del piñón tiene un efecto despreciable en la deflexión del eje a lo largo del ancho de cara del diente.

Además, para simplificar el cálculo de $K_{H\beta}$ en el Método C, la desalineación del engrane debida a las deflexiones elásticas o error de distorsión por deformación bajo carga f_{sh} se supondrá que sigue una línea recta en vez de describir una parábola.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, el factor $K_{H\beta}$ se calcula a partir de la carga media $\frac{F_m}{b}$, la rigidez de engrane o de contacto $C_{\gamma\beta}$ y el error de distorsión del engrane $F_{\beta y}$. Para ello se modeliza uno de los flancos como una serie de resortes, para así tener en cuenta la flexibilidad del contacto, pudiendo darse dos casos:

1. *Caso 1* $\left(\frac{b_{cal}}{b} \leq 1\right)$. Este primer caso tiene lugar cuando el contacto se realiza sólo en una porción del ancho de cara del diente, estando la longitud de contacto representada por la variable b_{cal} , la cual también se denomina anchura aparente de cálculo. Esta situación corresponde al caso en el que los engranajes se encuentran sometidos a una carga ligera o cuando existe un error de distorsión elevado.

La Figura 2.4.1 muestra el contacto entre el piñón y la rueda sin carga presentando inicialmente un error de alineación $F_{\beta y}$, también denominado error de distorsión.

Al aproximar los flancos de los dientes del piñón y de la rueda representados en la Figura 2.4.1, el lado derecho se cargará más. Esta situación se refleja en la Figura 2.4.2. La deformación máxima vendrá dada por el cociente entre la carga unitaria máxima y el coeficiente de rigidez:

$$F_{\beta\gamma} \frac{b_{cal}}{b} = \frac{\frac{F_{max}}{b}}{C_{\gamma\beta}} \quad (\mu\text{m}) \quad (2.4.2)$$

La Figura 2.4.3 muestra la distribución triangular de la carga cuya área corresponde a la carga total transmitida, $\frac{1}{2} \frac{F_{max}}{b} b_{cal}$ (N).

El área del triángulo se iguala al área de un rectángulo equivalente, relacionando de esta manera la carga máxima con la carga media por unidad de ancho del diente en ambos casos:

$$\frac{1}{2} \frac{F_{max}}{b} b_{cal} = \frac{F_m}{b} b \quad (2.4.3)$$

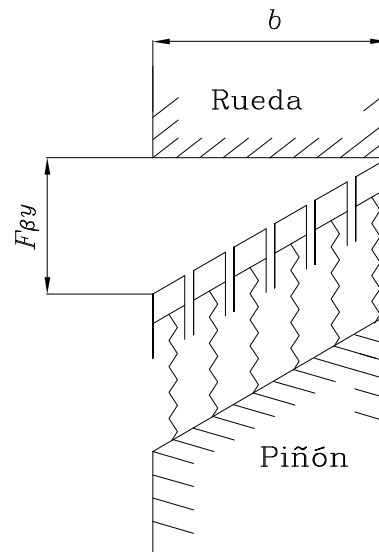


Figura 2.4.1: Error de alineación inicial en el plano de acción entre los dientes del piñón y la rueda.

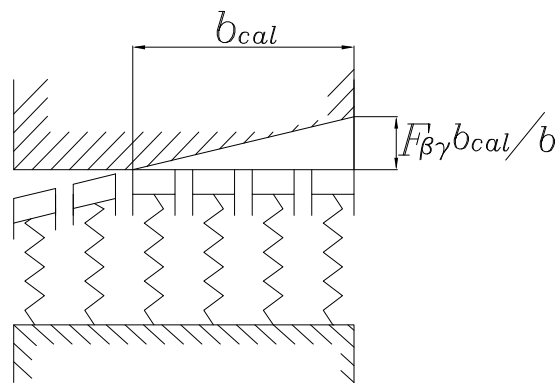


Figura 2.4.2: Caso de carga ligera o error de distorsión elevado.

A través de la expresión anterior, se obtiene el factor de distribución longitudinal de carga $K_{H\beta}$:

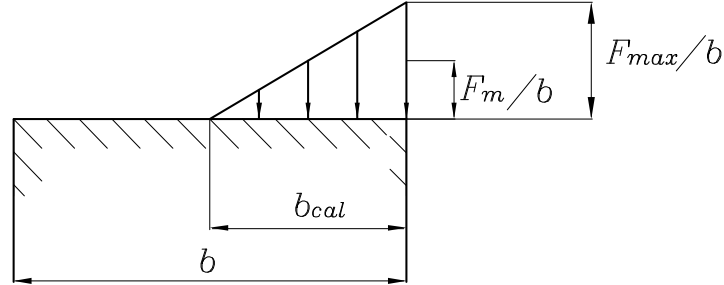


Figura 2.4.3: Distribución de la carga asociada a una carga ligera o un error de distorsión elevado.

$$K_{H\beta} = \frac{\frac{F_{max}}{b}}{\frac{F_m}{b}} = 2 \frac{b}{b_{cal}} \quad (2.4.4)$$

Combinando la ecuación (2.4.2) con la (2.4.4) se obtiene:

$$\frac{b_{cal}}{b} = \sqrt{\frac{2 \frac{F_m}{b}}{F_{\beta y} C_{\gamma \beta} y}} \quad (2.4.5)$$

y sustituyendo ésta en la (2.4.4), se obtiene la expresión final para $K_{H\beta}$:

$$K_{H\beta} = \sqrt{\frac{2 F_{\beta y} C_{\gamma \beta} y}{\frac{F_m}{b}}} \quad (2.4.6)$$

2. *Caso 2* $\left(\frac{b_{cal}}{b} > 1\right)$. En este caso el contacto se produce a lo largo de todo el ancho de cara del diente. Esta situación corresponde al caso de una carga elevada o de un error de distorsión bajo.

En la Figura 2.4.4, el contacto entre los dientes de las ruedas dentadas está más cargado, y por tanto, la deformación que se produce es mayor. Se observa que a lo largo del diente la deformación se ha aproximado a una línea recta y que el extremo derecho, al estar más cargado sufre la deformación máxima, la cual vendrá dada por $\left(\frac{F_{max}/b}{C_{\gamma \beta}}\right)$. Ésta es igual al

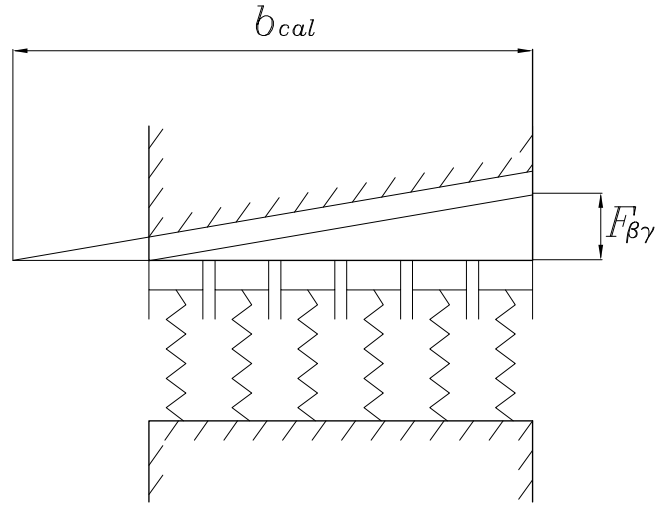


Figura 2.4.4: Caso de carga elevada o error de distorsión bajo.

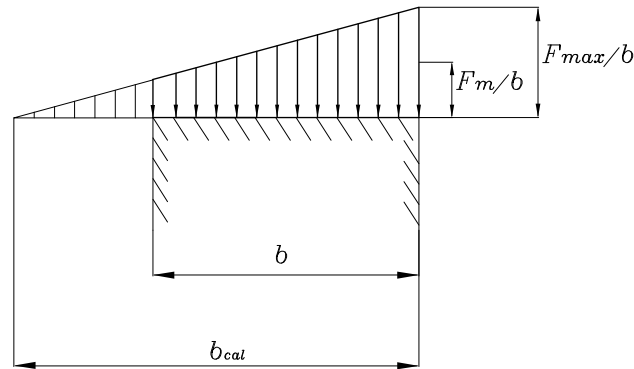


Figura 2.4.5: Distribución de la carga asociada a una carga elevada o un error de distorsión bajo.

error de distorsión $F_{\beta\gamma}$ más una cantidad constante a lo largo de todo el ancho del diente que se obtiene por semejanza de triángulos, quedando finalmente:

$$\frac{\frac{F_{max}}{b}}{C_{\gamma\beta}} = F_{\beta\gamma} + \frac{\frac{F_{max}}{b}}{C_{\gamma\beta}} \frac{b_{cal} - b}{b_{cal}} \quad (2.4.7)$$

La Figura 2.4.5 muestra la distribución de carga a lo largo de todo el ancho de cara del diente. Se puede relacionar la carga tangencial máxima por unidad de ancho con la carga media. Para ello se procederá del mismo modo que en el *Caso 1*, donde se igualaba el área

de la distribución de la carga con un área rectangular equivalente debida a la distribución de la carga media correspondiente (ahora hay que tener en cuenta que la primera ya no es un triángulo, y se tendrá que obtener por semejanza de triángulos), quedando finalmente:

$$\frac{F_{max}}{b} = \frac{F_m}{b} \frac{b_{cal}}{b_{cal} - \frac{b}{2}} \quad (2.4.8)$$

El factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$ se obtiene como:

$$K_{H\beta} = \frac{\frac{F_{max}}{b}}{\frac{F_m}{b}} = \frac{b_{cal}}{b_{cal} - \frac{b}{2}} = \frac{\frac{b_{cal}}{b}}{\frac{b_{cal}}{b} - 0,5} \quad (2.4.9)$$

Mediante las tres ecuaciones anteriores se obtendrá las expresiones finales para la relación $\frac{b_{cal}}{b}$ y para el factor $K_{H\beta}$:

$$\frac{b_{cal}}{b} = 0,5 + \frac{\frac{F_m}{b}}{F_{\beta y} C_{\gamma \beta y}} \quad (2.4.10)$$

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{F_{\beta y} C_{\gamma \beta y}}{2 \frac{F_m}{b}} \quad (2.4.11)$$

Resumiendo, existen dos posibles situaciones con sus correspondientes ecuaciones para obtener $K_{H\beta}$. A la hora de realizar los cálculos habrá que analizar las condiciones bajo las que se encuentra cada caso de diseño, para así seleccionar las expresiones adecuadas. A continuación, se resumen las dos situaciones posibles:

Caso 1) Se cumple que $\frac{b_{cal}}{b} \leq 1$ y se emplearán las siguientes relaciones:

$$K_{H\beta} = \sqrt{\frac{2 F_{\beta y} C_{\beta y}}{\frac{F_m}{b}}} \quad (2.4.12)$$

$$\frac{b_{cal}}{b} = \sqrt{\frac{2 \frac{F_m}{b}}{F_{\beta y} C_{\beta y}}} \quad (2.4.13)$$

Caso 2) Se cumple que $\frac{b_{cal}}{b} > 1$ y se emplearán las siguientes relaciones:

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{F_{\beta y} C_{\beta y}}{2 \frac{F_m}{b}} \quad (2.4.14)$$

$$\frac{b_{cal}}{b} = 0,5 + \frac{\frac{F_m}{b}}{F_{\beta y} C_{\beta y}} \quad (2.4.15)$$

Cálculo del error de distorsión en el engrane $F_{\beta y}$

El error de distorsión $F_{\beta y}$ viene dado por la siguiente expresión:

$$F_{\beta y} = x_{\beta} F_{\beta x} \quad (2.4.16)$$

donde $F_{\beta x}$ es el error de distorsión inicial, es decir, el valor absoluto de la suma de las deformaciones, desplazamientos y desalineaciones del piñón y rueda, y x_{β} es el factor de rodaje que reduce el error de distorsión inicial.

Cálculo del error de distorsión inicial $F_{\beta x}$

En el cálculo del error de distorsión inicial $F_{\beta x}$, la expresión a utilizar va a depender de dónde se produce el contacto entre los dientes del piñón y de la rueda, tal y como se recoge en la tabla de la Figura 2.4.6, donde se representan dos posibles situaciones A y B.

La situación A se produce cuando la posición de contacto entre los dientes se encuentra en la posición adecuada mediante ajustes en los cojinetes, modificaciones en los dientes o cualquier otra solución, consiguiéndose de esa manera que el efecto individual de la flexión compense al de la torsión. La ecuación a usar en este caso es:

$$F_{\beta x} = 1,33 B_1 f_{sh} + f_{\beta H5} \quad (\mu\text{m}) \quad (2.4.17)$$

donde $f_{\beta H5}$ es la tolerancia para la desviación de la inclinación de la hélice (ISO 1328-1:1995), f_{sh} es el error de distorsión del piñón por deformación bajo carga y B_1 es una constante que depende del tipo de modificación de las superficies de contacto.

La situación B se produce cuando el contacto entre el piñón y la rueda se sitúa en la zona más cargada del ancho del diente, donde los efectos de la flexión y de la torsión se suman. La ecuación a usar en este caso es:

$$F_{\beta x} = 1,33 B_1 f_{sh} + B_2 f_{ma} \quad (\mu\text{m}) \quad (2.4.18)$$

donde f_{ma} es la desalineación del engrane debida a errores en la fabricación y el montaje, f_{sh} es el error de distorsión del piñón por deformación bajo carga, y las constantes B_1 y B_2 dependen del tipo de modificación de las superficies de contacto cuyos valores vienen recogidos en la norma.

Por otro lado, el factor 1,33 se introduce en las dos ecuaciones anteriores para compensar el error de considerar que la deformación f_{sh} (o error de distorsión del piñón por deformación bajo carga) es lineal en vez de parabólico, y así obtener el mismo valor de $K_{H\beta}$ que si se hubiera elegido la segunda opción.

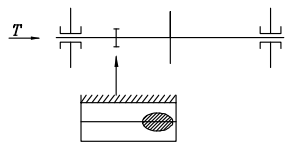
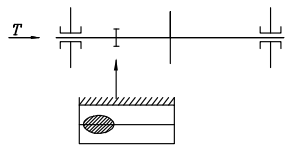
	Posición del contacto	Cálculo de $F_{\beta x}$
A)		Se usará la ecuación (2.4.18) que es compensatoria, dado que debido a modificaciones realizadas en el diente, el contacto se produce en una zona más favorable.
B)		Se usará la ecuación (2.4.19) que es aditiva, ya que se trata de un caso más desfavorable, en el que el contacto tiene lugar en la zona más cargada.

Figura 2.4.6: Guía para la determinación de $F_{\beta x}$ en relación con la posición del contacto entre dientes.

Una expresión más general que las anteriores es aquella en la que se tienen en cuenta otras deformaciones, además de las existentes en el piñón y su eje, reemplazándose las ecuaciones (2.4.17) y (2.4.18) por la siguiente expresión:

$$F_{\beta x} = 1,33B_1f_{sh} + f_{sh2} + f_{ma} + f_{ca} + f_{be} \quad (\mu\text{m}) \quad (2.4.19)$$

donde f_{sh2} incluye las deformaciones de la rueda y del eje de la misma, f_{ca} abarca las correspondientes a la caja de engranajes y f_{be} contiene los desplazamientos de los cojinetes.

Cálculo del error de distorsión del piñón por deformación bajo carga f_{sh}

El valor de f_{sh} tiene en cuenta la desalineación debida a los esfuerzos de torsión y de flexión a los que está sometido el piñón y el eje del mismo, siendo la expresión a utilizar para el caso de engranajes rectos la siguiente:

$$f_{sh} = \frac{F_m}{b} 0,023 \left(\left| B + K \frac{ls}{d_1^2} \left(\frac{d_1}{d_{sh}} \right)^4 - 0,3 \right| + 0,3 \right) \left(\frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (\mu\text{m}) \quad (2.4.20)$$

donde $B = 1$ en el caso que la potencia se transmita a través de un único par de engranajes. Esta ecuación es aplicable a muchos diseños comunes donde se obtienen valores bastante exactos, siempre que el coeficiente de Poisson ν y el módulo de elasticidad E correspondan a aceros. Por otro lado, dentro de la expresión anterior se incluyen constantes que se obtienen de resultados experimentales.

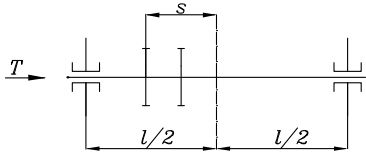
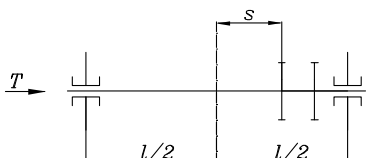
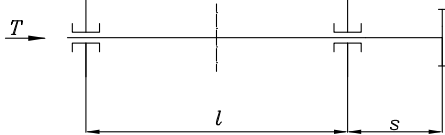
Factor K		Posibles disposiciones
$d_1/d_{sh1} \geq 1.15$	$d_1/d_{sh1} < 1.15$	
0.48	0.8	$s/l < 0.3$ 
-0.48	-0.8	$s/l < 0.3$ 
1.33	1.33	$s/l < 0.3$ 

Figura 2.4.7: Valor del factor K en función de la posición del engranaje a lo largo del eje.

El valor del factor K dependerá de la disposición del engranaje a lo largo del eje y de la relación existente entre el diámetro del piñón y el correspondiente a su eje, tomando los valores recogidos en la tabla mostrada en la Figura 2.4.7.

De la ecuación (2.4.20) se extrae que el error de distorsión del piñón por deformación bajo carga f_{sh} va a depender de los siguientes factores:

- La relación entre el ancho de cara del diente y el diámetro primitivo del piñón $\left(\frac{b}{d_1} \right)$.

- El término $\left(\frac{ls}{d_1^2}\right)$, donde s es la distancia entre el piñón y el punto medio entre los cojinetes y l es la longitud entre apoyos.
- La relación entre el diámetro primitivo del piñón y el diámetro de su eje $\left(\frac{d_1}{d_{sh}}\right)$.
- El parámetro K , cuyos valores vienen recogidos en la tabla de la Figura 2.4.7, incluye el efecto de suma o compensación existente entre la flexión y la torsión debida a la posición que el piñón ocupe en cada caso.
- El esfuerzo tangencial unitario medio transmitido $\left(\frac{F_m}{b}\right)$.

Cálculo de la rigidez de contacto $C_{\gamma\beta}$

La rigidez de contacto $C_{\gamma\beta}$ representa el valor medio de la rigidez de contacto entre los dientes en engrane. Su unidad es $\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$. El cálculo de $C_{\gamma\beta}$ mediante el Método C es una simplificación del Método B, por lo que se va a incluir aquí una explicación detallada del cálculo de $C_{\gamma\beta}$ mediante el Método B.

La rigidez $C_{\gamma\beta}$ se ve influenciada por los siguientes factores:

- Los datos de los engranajes (número de dientes, perfil de cremallera, desplazamiento de herramienta, grado de recubrimiento).
- El diseño del cuerpo del engranaje.
- La rugosidad de la superficie de los dientes.
- La desalineación del engrane entre la rueda y el piñón.
- El módulo de elasticidad del material.
- La carga normal al flanco del diente.
- El tipo de conexión entre el engranaje y su eje.

El Método B obtiene el valor de $C_{\gamma\beta}$ a partir de la rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes c' , que a su vez se obtiene de la rigidez máxima de contacto teórica entre una pareja de dientes c'_{th} , y de una serie de factores que modifican esta última para condiciones diferentes a las teóricas. Las condiciones teóricas para la obtención de c'_{th} se basan en estudios del comportamiento elástico de engranajes cilíndricos rectos macizos con el perfil de referencia recogido en ISO 53, y para una carga de $\left(\frac{F_t}{b}\right) = 300 \text{ N/mm}$.

El valor c'_{th} se obtiene como

$$c'_{th} = \frac{1}{q'} \quad (2.4.21)$$

donde q' es la flexibilidad mínima de contacto teórica entre una pareja de dientes y que viene dada por

$$q' = C_1 + \frac{C_2}{N_1} + \frac{C_3}{N_2} + C_4\chi_1 + \frac{C_5\chi_1}{N_1} + C_6\chi_2 + \frac{C_7\chi_2}{N_2} + C_8\chi_1^2 + C_9\chi_2^2 \quad \left(\frac{\text{mm} \cdot \mu\text{m}}{\text{N}}\right) \quad (2.4.22)$$

siendo N_1 y N_2 los números de dientes de piñón y rueda, y χ_1 y χ_2 los coeficientes de desplazamiento de herramienta de piñón y rueda, respectivamente. Por otro lado, los valores de las constantes vienen recogidos en la Tabla 2.4.1.

Tabla 2.4.1: Constantes C_i .

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
0.04723	0.15551	0.25791	-0.00635	-0.11654	-0.00193	-0.24188	0.00529	0.00182

La rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes c' se obtiene entonces como,

$$c' = c'_{th} C_M C_R C_B \cos \beta \quad \left(\frac{\text{N}}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}}\right) \quad (2.4.23)$$

donde

- C_M tiene en cuenta las diferencias entre los valores reales de rigidez medidos y los valores teóricos de rigidez para engranajes cilíndricos macizos. Su valor es $C_M = 0,8$.
- C_R tiene en cuenta la flexibilidad que pueden aportar el aro base y las rigidizaciones en un engranaje no macizo. Para el caso de engranajes macizos su valor es 1.
- C_B tiene en cuenta las desviaciones del perfil de la cremallera utilizada en los engranajes respecto al perfil estándar de cremallera descrito en ISO 53. Su valor viene dado por:

$$C_B = [1,0 + 0,5 \left(1,25 - \frac{h_{fp}}{m}\right)](1,0 - 0,02(20^\circ - \alpha)) \quad (2.4.24)$$

donde α es el ángulo de presión de la herramienta en grados, h_{fp} es la altura de dedendo en mm, y m es el módulo en mm.

- $\cos \beta$ tiene en cuenta el ángulo de hélice de engranajes helicoidales para pasar de la rigidez en el plano normal al plano transversal.

La ecuación (2.4.23) es válida para $\frac{F_t K_A}{b} \geq 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$. En el caso que $\frac{F_t K_A}{b} < 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, la rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes c' se calcula como:

$$c' = c'_{th} C_M C_R C_B \cos \beta \left(\frac{F_t K_A}{100b} \right)^{0,25} \left(\frac{\text{N}}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right) \quad (2.4.25)$$

donde el coeficiente K_A es el factor de aplicación de la carga que tiene en cuenta las sobrecargas dinámicas procedentes de fuentes externas, las cuales dependen de las características de la máquina de accionamiento y de la conducida.

Una vez obtenida la rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes c' , se calcula la rigidez de contacto $C_{\gamma\beta}$ como:

$$C_{\gamma\beta} = 0,85 c' (0,75 \varepsilon_\alpha + 0,25) \left(\frac{\text{N}}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right) \quad (2.4.26)$$

donde ε_α es el grado de recubrimiento cuya expresión es la siguiente:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\Pi} \left[N_1 \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}} \right)^2 - 1} + N_2 \sqrt{\left(\frac{r_{a2}}{r_{b2}} \right)^2 - 1} - (N_1 + N_2) \tan \alpha \right] \quad (2.4.27)$$

siendo r_{a1} y r_{a2} los radios de cabeza de piñón y rueda en mm, r_{b1} y r_{b2} los radios de base de las ruedas dentadas en mm, y α el ángulo de presión.

Cálculo de la carga media $\left(\frac{F_m}{b} \right)$

Como ya se ha indicado a lo largo de este capítulo, se denominará carga tangencial unitaria media a $\left(\frac{F_m}{b} \right)$, la cual incluye los efectos de los factores K_A y K_V , y cuya expresión viene dada por:

$$\frac{F_m}{b} = K_A K_V \frac{F_t}{b} \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right) \quad (2.4.28)$$

donde F_t es la fuerza tangencial entre las ruedas dentadas en N, K_A es el factor de aplicación mencionado anteriormente y K_V es el factor dinámico, el cual tiene en cuenta las sobrecargas internas que se producen por la vibraciones generadas entre el piñón y la rueda.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Cálculo de $K_{H\beta}$ mediante el método de los elementos finitos

Para la obtención del factor $K_{H\beta}$ mediante el método de los elementos finitos se ha propuesto un modelo físico conformado por un piñón, una rueda y dos ejes. Como condiciones de partida se considera que los ejes se encuentran perfectamente alineados y que en los extremos de los mismos se localizan unos cojinetes que actúan como soportes y en los cuales la flexión y el giro están permitidos. Por otro lado, los engranajes se encuentran rígidamente unidos a sus respectivos ejes y las superficies de los dientes quedan definidas por un perfil de evolvente.

Al conjunto se le aplicará un par de torsión T en uno de los extremos del eje del piñón, mientras que el movimiento de rotación en el eje z de la rueda se encuentra restringido por estar uno de sus extremos bloqueados. El modelo físico que se tiene se muestra en la Figura 3.1.1. El modelo de los elementos finitos empleado se encuentra descrito con mayor detalle en el Capítulo 2.

El cálculo de $K_{H\beta}$ mediante el método de los elementos finitos se realiza como se indica a continuación:

- El valor de la carga por unidad de ancho nodal $\left(\frac{F}{b}\right)_i$, se obtiene al multiplicar la presión p_i de cada nodo i de la superficie de contacto del diente por la altura h_i (véase la Fig. 3.1.2):

$$\left(\frac{F}{b}\right)_i = p_i h_i \quad (3.1.1)$$

La altura h_i se calcula como

$$h_i = \frac{h_{i,i+1}}{2} + \frac{h_{i-1,i}}{2} \quad (3.1.2)$$

donde

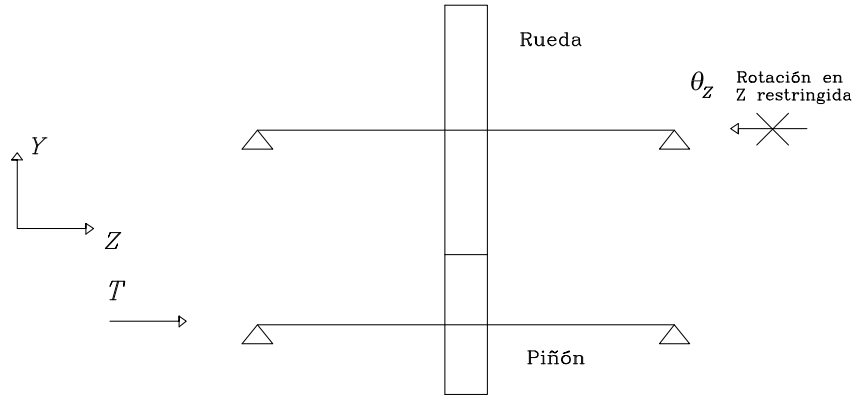


Figura 3.1.1: Modelo físico para una transmisión de engranajes rectos.

$$h_{i,i+1} = |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| = |\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}| \quad (3.1.3)$$

$$h_{i-1,i} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| = |\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}| \quad (3.1.4)$$

siendo \mathbf{r}_{i+1} , \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_{i-1} los vectores de posición de los nodos $i+1$, i e $i-1$ y x_{i+1} , x_i , x_{i-1} , y_{i+1} , y_i , y_{i-1} las coordenadas (x,y) de los mismos.

- Para la obtención del valor de la carga por unidad de ancho como una función de la coordenada z se suman los valores de $\left(\frac{F}{b}\right)_i$ de todos los nodos que están cargados y que tienen la misma coordenada z :

$$\left(\frac{F}{b}\right)(z) = \sum \left(\frac{F}{b}\right)_i \quad \left(\frac{N}{mm}\right) \quad (3.1.5)$$

- Se obtiene a continuación el máximo valor de $\left(\frac{F}{b}\right)(z)$, $\left(\frac{F}{b}\right)_{max}$.
- La carga media $\left(\frac{F}{b}\right)_m$ se obtiene a partir del par torsor aplicado T , el ancho de cara del diente b , el radio primitivo del piñón r_{p1} y el ángulo de presión α :

$$\left(\frac{F}{b}\right)_m = \frac{T}{b r_{p1} \cos \alpha} \quad \left(\frac{N}{mm}\right) \quad (3.1.6)$$

- Una vez obtenidos todos los valores anteriores se calcula el valor de $K_{H\beta}$ según el método de los elementos finitos como:

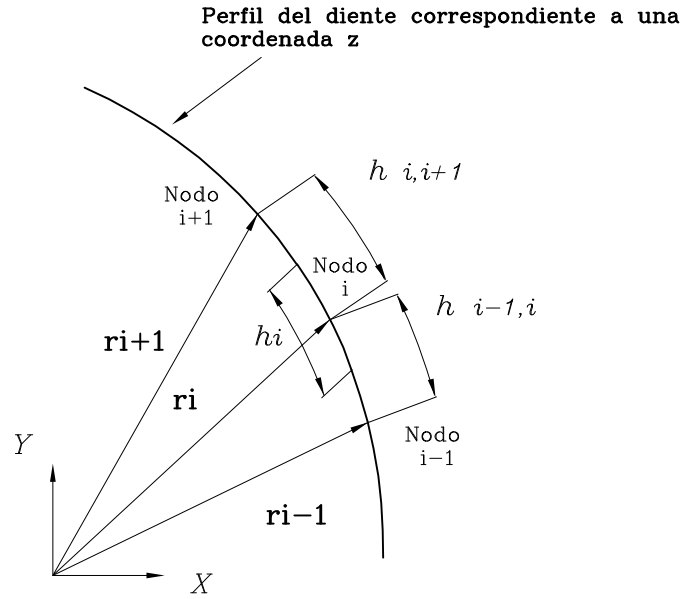


Figura 3.1.2: Representación de los nodos i-1, i, i+1 y altura h_i .

$$K_{H\beta-MEF} = \frac{\left(\frac{F}{b}\right)_{max}}{\left(\frac{F}{b}\right)_m} \quad (3.1.7)$$

Los valores del factor $K_{H\beta}$ obtenidos mediante el método de los elementos finitos se compararán con los que resultan de la aplicación del Método C de la norma ISO.

La distribución real de la carga a lo largo del ancho de cara del diente frente a la distribución teórica se muestra en la Figura 3.1.3 para un caso particular, donde se observa como se ha mencionado en apartados anteriores que la carga no se encuentra repartida uniformemente. Esta distribución variará dependiendo del caso en estudio y se verá afectada por factores diversos tales como la posición del engranaje a lo largo del eje, el par torsor y otros factores geométricos.

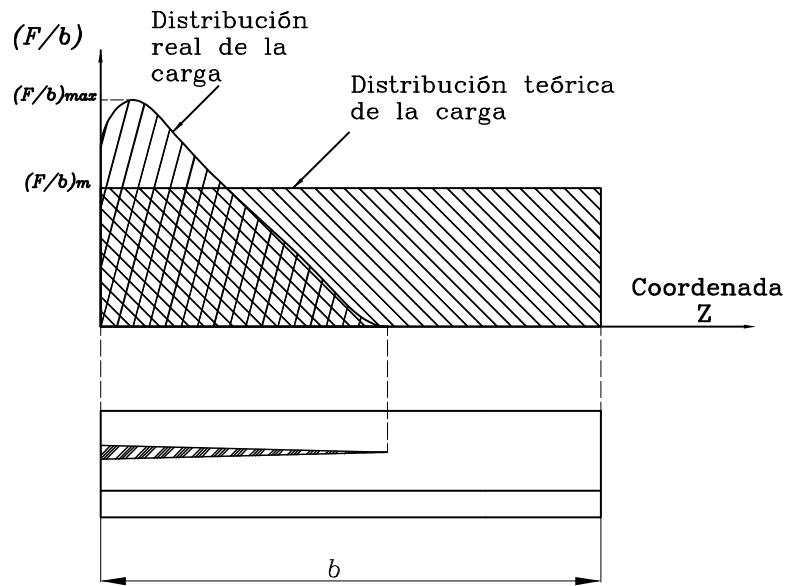


Figura 3.1.3: Distribución real y teórica de la carga a lo largo del ancho b del diente.

3.2. Cálculo de $K_{H\beta}$ mediante el Método C de la norma ISO

Para la obtención del factor $K_{H\beta}$ mediante el Método C de la norma ISO se ha seguido el procedimiento explicado en el Capítulo 2. Dado que se van a comparar los resultados obtenidos con el Método C y los resultados obtenidos con el método de los elementos finitos, los valores elegidos para los coeficientes del Método C han de aplicarse a una transmisión de engranajes con superficies perfectas y sin modificación alguna en los dientes. De esta manera se ha considerado que:

- El factor de rodaje x_b (véase ecuación (2.4.16)) toma valor uno dado que las superficies de los dientes no experimentan modificación alguna por el efecto del rodaje.
- La ecuación utilizada para el cálculo del error de distorsión inicial $F_{\beta x}$ es la más desfavorable, es decir, la ecuación (2.4.18) dado que las superficies de los dientes no se han modificado con el fin de compensar los efectos de la flexión y la torsión.
- El valor tomado por la desalineación en el engrane debida a errores de fabricación y montaje f_{ma} en la ecuación (2.4.18) es cero, dado que no se consideran errores de fabricación y montaje.
- El valor de la constante B_1 en la ecuación (2.4.18) toma valor uno dado que no se va a aplicar ningún tipo de modificación en las superficies de contacto.

- En los casos analizados en los que se ha tenido en cuenta el error de distorsión aportado por la rueda, se ha aplicado la ecuación (2.4.19) en lugar de la (2.4.18), considerando valores nulos para f_{ma} , f_{ca} y f_{be} .
- En la ecuación (2.4.20) para la determinación del error de distorsión del piñón por deformación bajo carga, f_{sh} , el valor de la constante B toma valor uno dado que la potencia se va a transmitir a través de un único par de engranajes.
- Para el cálculo de f_{sh2} , en aquellos casos en los que se ha considerado, se ha utilizado igualmente la ecuación (2.4.20) con $B = 1$ y con un signo negativo precediendo al factor K , dado que la posición relativa del par torsor respecto a la rueda va justo al contrario de como se produce en el piñón. Por otro lado, los valores de diámetro primitivo y de diámetro del eje corresponden a los de la rueda.
- Los coeficientes χ_1 y χ_2 utilizados en la ecuación (2.4.22) son nulos dado que no se han aplicado desplazamientos de herramienta.
- Los valores de C_M y C_R en la ecuación (2.4.23) o en la ecuación (2.4.25) son los correspondientes a engranajes macizos ($C_M = 0,8$, $C_R = 1$).
- El valor de $\cos \beta$ en la ecuación (2.4.23) o en la ecuación (2.4.25) toma el valor uno al considerar engranajes cilíndricos rectos.
- Los valores de los coeficientes K_A y K_V en la ecuación (2.4.28) toman el valor uno al considerar una transmisión de potencia suave y uniforme sin efectos dinámicos.

Capítulo 4

Resultados

Para el desarrollo del presente proyecto se han analizado 49 casos de diseño en los que se ha determinado el factor $K_{H\beta}$ mediante el método de los elementos finitos y aplicando el Método C de la norma ISO 6336. Los pasos seguidos para la obtención del factor $K_{H\beta}$ mediante los dos métodos mencionados anteriormente han sido descritos en el Capítulo 3.

Los casos de diseño analizados se han agrupado en tres grupos A, B y C, correspondientes a unos datos geométricos comunes en cada uno de los grupos. En cada caso de diseño se han realizado dos análisis por el método de los elementos finitos (MEF) correspondientes a los dos tipos de modelos empleados (ver Capítulo 2), uno donde se tiene en cuenta la deformación torsional de las superficies de contacto y del cuerpo del engranaje, y otro donde no se tiene en cuenta dicha deformación torsional. Estos dos tipos de análisis se designan como *MEF con torsión* y *MEF sin torsión*. En cada caso de diseño se han realizado igualmente dos análisis aplicando el Método C de la norma ISO, uno teniendo en cuenta la deflexión del eje de la rueda f_{sh2} , y otro sin tenerla en cuenta. Estos dos tipos de análisis se designan como *Método C con f_{sh2}* y *Método C sin f_{sh2}* .

4.1. Casos del grupo A

Los datos geométricos de las ruedas dentadas para este primer grupo quedan recogidos en la Tabla 4.1.1. Este grupo abarca 25 casos de diseño en los que se ha analizado:

- a) La posición relativa de los engranajes en los ejes.
- b) La variación del par torsor aplicado.
- c) La variación del ancho de cara del diente.
- d) La variación del diámetro del eje.
- e) La posición relativa de los engranajes en voladizo.

Tabla 4.1.1: Datos geométricos para el grupo de casos A.

Variabes	Valores
Módulo, m (mm)	1,5
Ancho de la cara del diente, b (mm)	20
Ángulo de presión, α ($^{\circ}$)	25
Nº de dientes del piñón, N_1	20
Nº de dientes de la rueda, N_2	51
Diámetro primitivo del piñón, d_1 (mm)	30
Diámetro primitivo de la rueda, d_2 (mm)	76,5
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} (mm)	25
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} (mm)	30

4.1.1. Análisis de la posición relativa de los engranajes en los ejes

En los casos del A_1 al A_9 se ha variado la posición de los engranajes a lo largo del eje con una longitud entre apoyos $l = 180$ mm (véase la Fig. 4.1.1), obteniéndose para cada disposición los valores de $K_{H\beta}$. Las distintas disposiciones estudiadas se encuentran recogidas en la Tabla 4.1.2.

Para estos nueve primeros casos el par torsor aplicado se mantiene constante tanto en módulo como en punto de aplicación, siendo la posición de los engranajes el único parámetro que se modifica.

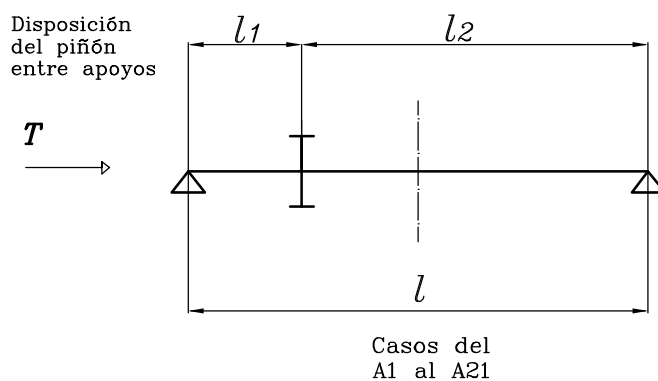
Figura 4.1.1: Disposición del piñón para los casos del A_1 al A_{21} .

Tabla 4.1.2: Datos para los casos del A_1 al A_9 .

Casos	l_1 (mm)	l_2 (mm)	$T(\text{N} \cdot \text{m})$
A_1	30	150	50
A_2	45	135	50
A_3	60	120	50
A_4	75	105	50
A_5	90	90	50
A_6	105	75	50
A_7	120	60	50
A_8	135	45	50
A_9	150	30	50

Análisis del contacto entre dientes para los casos del A_1 al A_9

La formación de la huella de contacto y la distribución de las presiones de contacto se han obtenido en los nueve casos de diseño mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

Las Figuras 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.6 muestran la formación del contacto en los casos A_3 , A_5 y A_7 , respectivamente, teniendo en cuenta los efectos de la torsión. Las Figuras 4.1.3, 4.1.5 y 4.1.7 muestran la formación del contacto en los mismos casos, respectivamente, pero sin tener en cuenta los efectos de la torsión.

Comparando la formación de la huella de contacto en los casos A_3 , A_5 y A_7 cuando no se tiene en cuenta la torsión, se observa cierta simetría en cuanto a la presión máxima y lugar donde se produce. En el caso A_5 sin torsión (Fig. 4.1.5), la distribución de presión es uniforme al encontrarse los engranajes justo en la zona central de los ejes. En los casos A_3 y A_7 sin torsión (Fig. 4.1.3 y 4.1.7) la distribución de presión deja de ser uniforme debido a la deflexión de los ejes bajo carga y a la posición que ocupan los engranajes sobre el eje.

Comparando la formación de la huella de contacto en los casos A_3 , A_5 y A_7 cuando sí se tiene en cuenta la torsión, se observa que deja de existir simetría en los resultados. El caso A_3 (Fig. 4.1.2) muestra una presión mayor que el caso A_7 (Fig. 4.1.6) y la distribución de presión no es uniforme en el caso A_5 (Fig. 4.1.4), observándose dos picos de presión. Esta falta de simetría se debe al efecto de la deformación torsional de las superficies de los dientes y de los cuerpos de los engranajes.

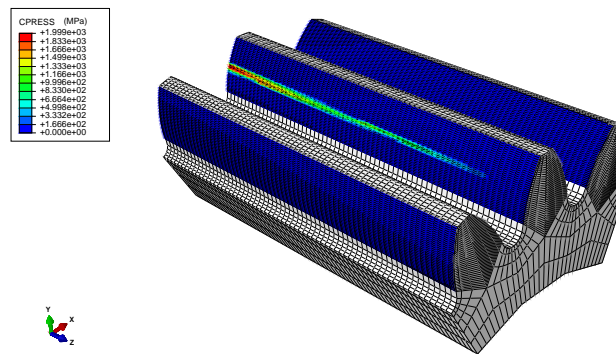


Figura 4.1.2: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_3 incluyendo el efecto de la torsión.

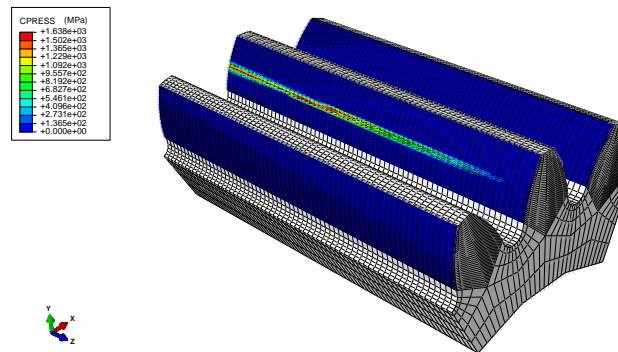


Figura 4.1.3: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_3 sin incluir el efecto de la torsión.

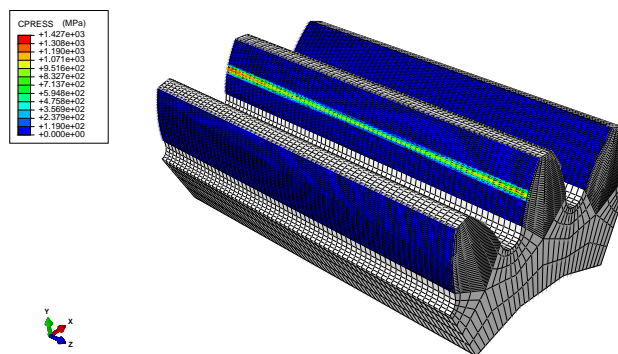


Figura 4.1.4: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_5 incluyendo el efecto de la torsión.

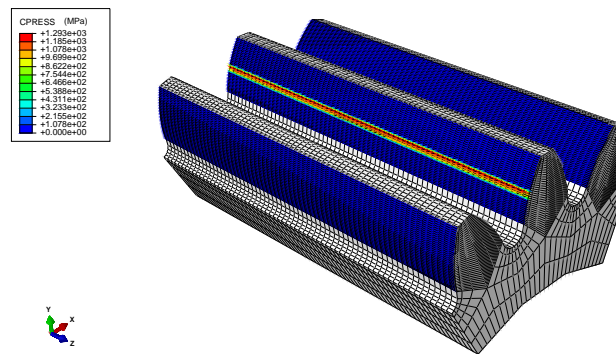


Figura 4.1.5: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_5 sin incluir el efecto de la torsión.

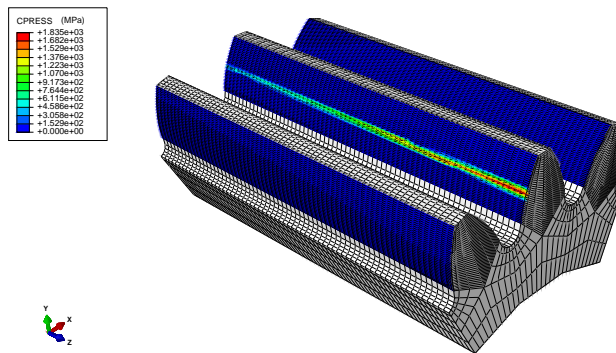


Figura 4.1.6: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_7 incluyendo el efecto de la torsión.

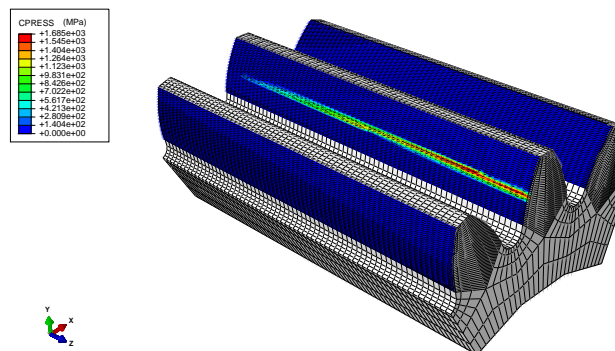


Figura 4.1.7: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_7 sin incluir el efecto de la torsión.

Resultados y representación gráfica del factor $K_{H\beta}$ obtenidos para los casos del A_1 al A_9

Los valores de $K_{H\beta}$ para los casos del A_1 al A_9 se muestran en la Tabla 4.1.3, mientras que la Figura 4.1.8 muestra la tendencia que sigue el factor de distribución longitudinal de la carga cuando se modifica la posición de los engranajes. Se observa que los valores del factor $K_{H\beta}$ obtenidos por el Método C de la norma ISO y por el análisis de elementos finitos siguen una misma tendencia, obteniéndose el valor mínimo en el caso A_5 . La explicación radica en el hecho de que la deflexión del eje en la parte central del mismo, donde se sitúan los engranajes en el caso A_5 , es mínima, por lo que se produce un reparto prácticamente uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara del diente. Por tanto, los valores de $K_{H\beta}$ para este caso son próximos a la unidad.

Tabla 4.1.3: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del A_1 al A_9 .

Casos estudiados	MEF con torsión	MEF sin torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
A_1	2.94118	2.30786	2.43812	2.81280
A_2	3.09658	2.36992	2.13850	2.45837
A_3	2.85562	2.11560	1.80050	2.04330
A_4	2.26689	1.60490	1.45764	1.57663
A_5	1.53113	1.01296	1.11481	1.12809
A_6	1.97955	1.52465	1.29690	1.43450
A_7	2.57936	2.11175	1.63973	1.90162
A_8	2.84395	2.34076	1.98256	2.33990
A_9	2.67328	2.28536	2.36250	2.70990

La Figura 4.1.8 muestra que los valores de $K_{H\beta}$ obtenidos mediante el Método C con f_{sh2} se aproximan a los conseguidos por el método de los elementos finitos sin torsión. Esta aproximación se pierde cuando el piñón se encuentra en los extremos. De hecho, los resultados del MEF muestran un máximo relativo en la variación de $K_{H\beta}$ que no muestran los resultados del Método C de la norma ISO. Por otro lado, se observa que los valores de $K_{H\beta}$ obtenidos por el MEF en el que se incluyen los efectos de la torsión se encuentran muy por encima tanto de los obtenidos mediante la aplicación del Método C de la norma ISO como por el MEF sin considerar los efectos de la torsión. Finalmente, también se observa que los valores de $K_{H\beta}$ no siguen una tendencia simétrica a lo largo del eje tanto para el MEF con torsión como para el Método C de la norma ISO, mientras que para los resultados correspondientes al MEF sin torsión la tendencia sí es simétrica.

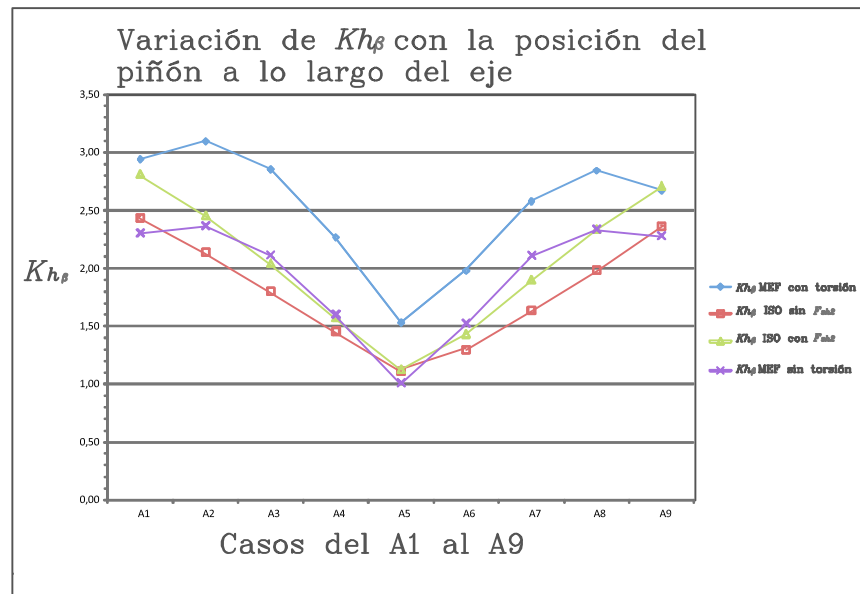


Figura 4.1.8: Variación de $K_{H\beta}$ con la posición del piñón a lo largo del eje de los casos del A_1 al A_9 .

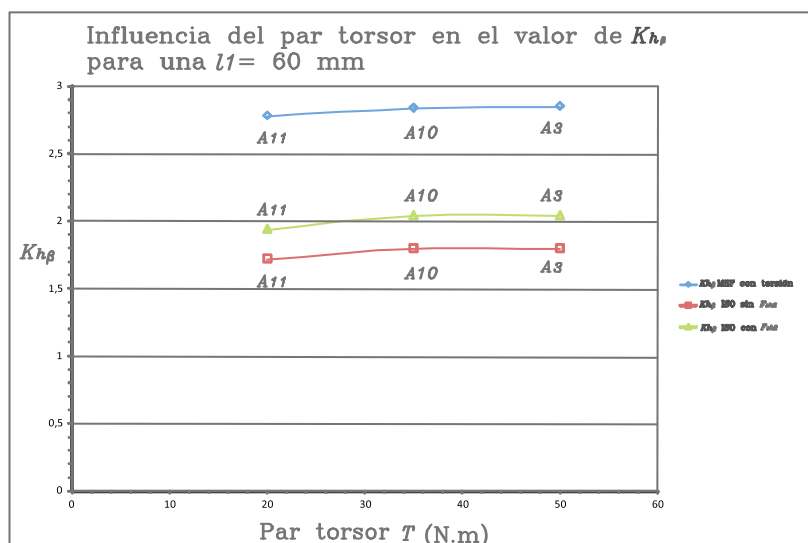
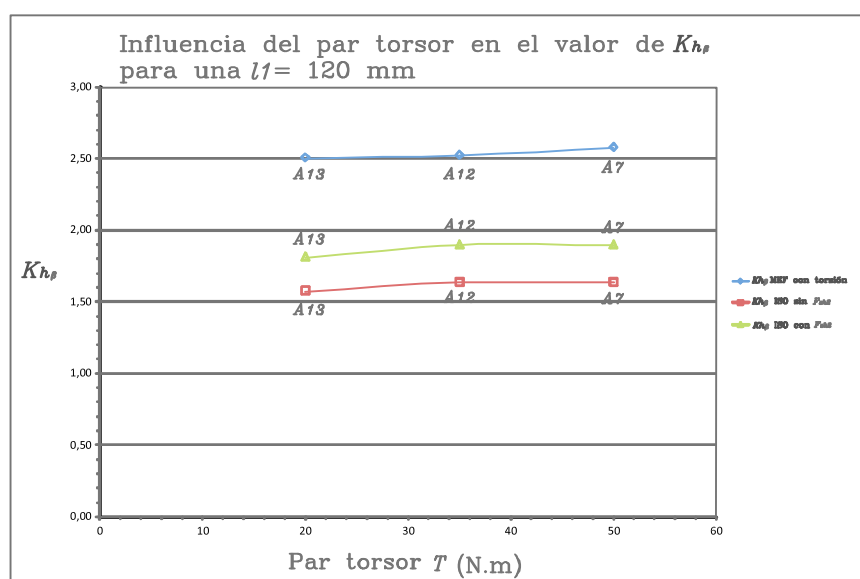
4.1.2. Análisis de la variación del par torsor aplicado

La Tabla 4.1.4 muestra cuatro nuevos casos de diseño en los que se ha modificado el valor del par torsor aplicado y considerando las mismas posiciones que en los casos A_3 y A_7 .

Tabla 4.1.4: Datos para los casos del A_{10} al A_{13} .

Casos	l_1 (mm)	l_2 (mm)	T (N · m)
A_{10}	60	120	35
A_{11}	60	120	20
A_{12}	120	60	35
A_{13}	120	60	20

Las Figuras 4.1.9 y 4.1.10 muestran la variación del factor $K_{H\beta}$ con el par de torsor T para dos disposiciones del piñón, $l_1 = 60$ mm y $l_1 = 120$ mm respectivamente, observándose un aumento ligero del factor $K_{H\beta}$ con el aumento del par T .

Figura 4.1.9: Influencia del par T en $K_{H\beta}$ para $l_1 = 60$ mm.Figura 4.1.10: Influencia del par T en $K_{H\beta}$ para $l_1 = 120$ mm.

La Tabla 4.1.5 muestra los valores obtenidos de $K_{H\beta}$ por los diversos métodos. En ésta puede observarse que el factor $K_{H\beta}$ no varía mucho con la modificación del par torsor de entrada T , y que para una posición del piñón próxima a la entrada del par (casos A_3 , A_{10} , A_{11}), los valores del factor son algo superiores que los correspondientes a la misma disposición en el lado opuesto del eje (casos A_7 , A_{12} , A_{13}). Esta asimetría en los resultados del factor $K_{H\beta}$ obtenidos por el método de los elementos finitos, también es considerada por la norma ISO tal y como se observa en dicha tabla, o bien comparando entre sí las Figuras 4.1.9 y 4.1.10.

Tabla 4.1.5: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del A_{10} al A_{13} .

Casos estudiados	MEF con torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
A_{10}	2.81007	1.80046	2.04330
A_{11}	2.78362	1.72330	1.94315
A_{12}	2.52593	1.63973	1.90162
A_{13}	2.50764	1.57806	1.81470

4.1.3. Análisis de la variación del ancho de cara del diente

La Tabla 4.1.6 muestra cuatro nuevos casos de diseño en los que se ha modificado el ancho de cara del diente b para distintas disposiciones del piñón sobre el eje correspondientes a los casos A_3 y A_7 .

Los resultados obtenidos para los casos del A_{14} al A_{17} del factor $K_{H\beta}$ se muestran en la Tabla 4.1.7.

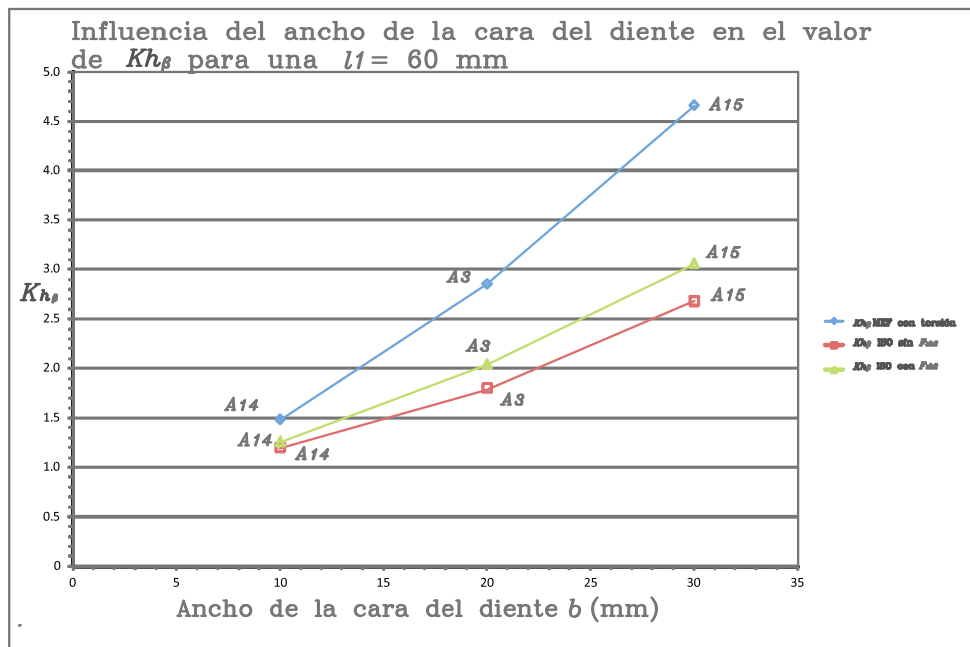
Tabla 4.1.6: Datos para los casos del A_{14} al A_{17} .

Casos	l_1 (mm)	l_2 (mm)	b (mm)
A_{14}	60	120	10
A_{15}	60	120	30
A_{16}	120	60	10
A_{17}	120	60	30

Las Figuras 4.1.11 y 4.1.12 muestran que el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$ aumenta considerablemente con el ancho b , siendo la tendencia semejante para los análisis por el método de los elementos finitos y por el Método C de la norma ISO. La diferencia entre ambos estriba en que los valores numéricos alcanzados por el primero son bastante superiores a los

Tabla 4.1.7: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del A_{14} al A_{17} .

Casos estudiados	MEF con torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
A_{14}	1.48488	1.20012	1.26094
A_{15}	4.66308	2.68406	3.06495
A_{16}	1.42211	1.15993	1.22540
A_{17}	4.25461	2.39949	2.84860

Figura 4.1.11: Influencia del ancho de cara del diente b en $K_{H\beta}$ para $l_1 = 60$ mm.

obtenidos por el Método C, acentuándose dicha diferencia para los valores del ancho de diente b superiores.

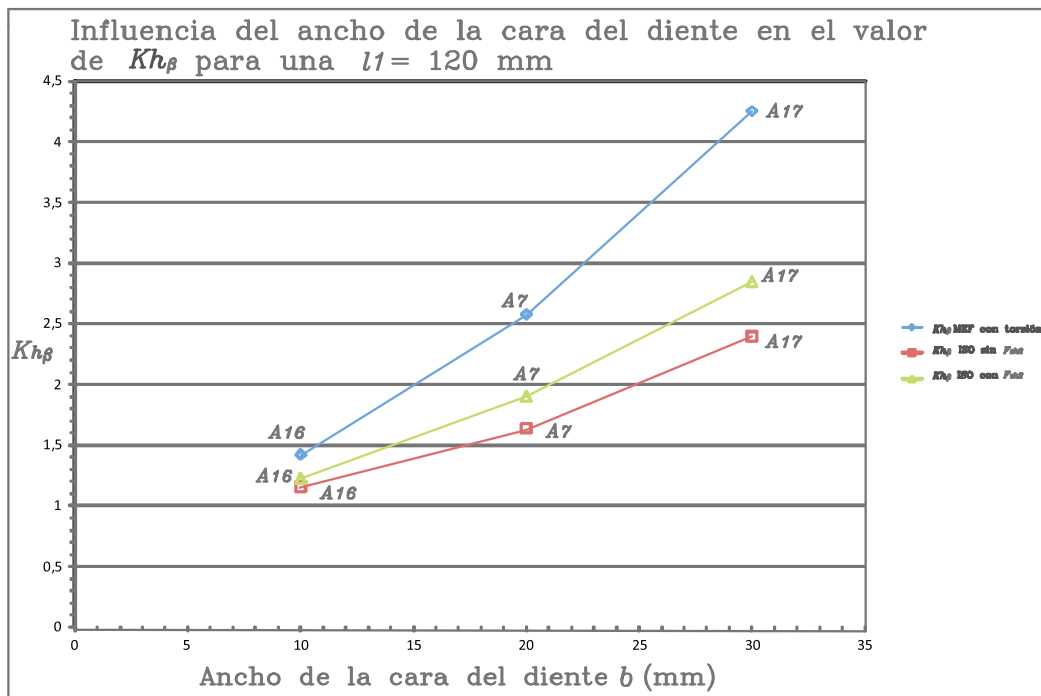


Figura 4.1.12: Influencia del ancho de cara del diente b en $K_{H\beta}$ para $l_1 = 120$ mm.

4.1.4. Análisis de la variación del diámetro del eje del piñón

La Tabla 4.1.8 muestra cuatro nuevos casos de diseño en los que se ha modificado el diámetro del eje del piñón d_{sh1} , con el fin de estudiar la influencia de dicho parámetro en el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$ para una posición del piñón sobre el eje, siendo las posiciones estudiadas las mismas que las consideradas en los casos A_3 y A_7 .

Tabla 4.1.8: Datos para los casos del A_{18} al A_{21} .

Casos	l_1 (mm)	l_2 (mm)	d_{sh1} (mm)
A_{18}	60	120	15
A_{19}	60	120	20
A_{20}	120	60	15
A_{21}	120	60	20

Los resultados obtenidos para el factor de distribución de la carga $K_{H\beta}$ se pueden ver en la

Tabla 4.1.9, y están representados en las Figuras 4.1.13 y 4.1.14. Se observa que la tendencia de los valores del factor $K_{H\beta}$ es una disminución significativa con el incremento del diámetro del eje. Probablemente un mayor valor de d_{sh1} hace que el conjunto eje - piñón se vea menos afectado por los efectos de flexión y torsión y, por tanto, el resultado sea una distribución longitudinal de la carga más uniforme.

Tabla 4.1.9: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del A_{18} al A_{21} .

Casos estudiados	MEF con torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
A_{18}	5.54755	4.64987	4.75337
A_{19}	3.57892	2.67489	2.85101
A_{20}	5.37420	4.58021	4.69318
A_{21}	3.39947	2.55188	2.74949

Por otro lado, y tal y como ocurría para los casos anteriores, los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos coinciden en tendencia con los obtenidos por el Método C de la norma ISO, pero alcanzando los primeros valores significativamente mayores que los segundos.

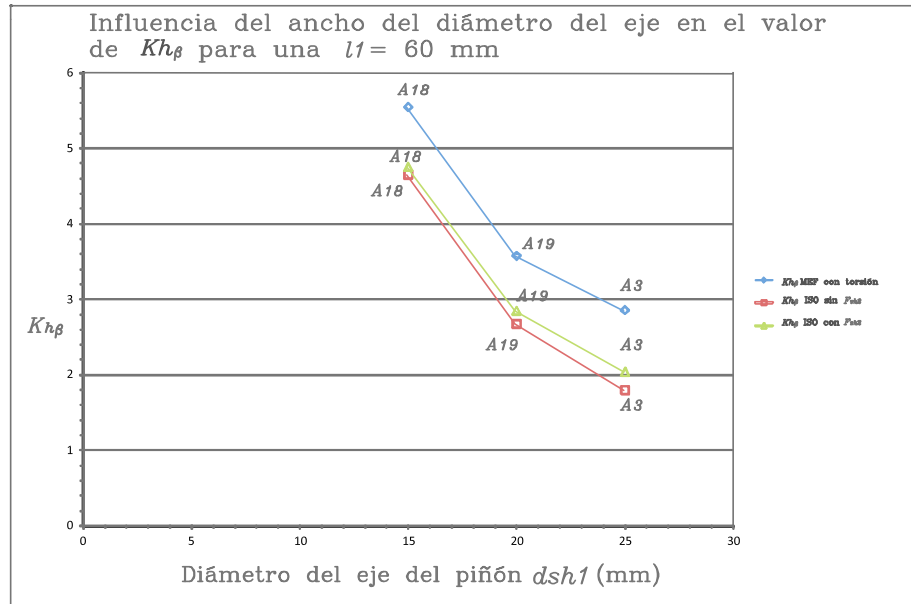


Figura 4.1.13: Influencia del diámetro del eje del piñón d_{sh1} en $K_{H\beta}$ para $l_1 = 60$ mm.

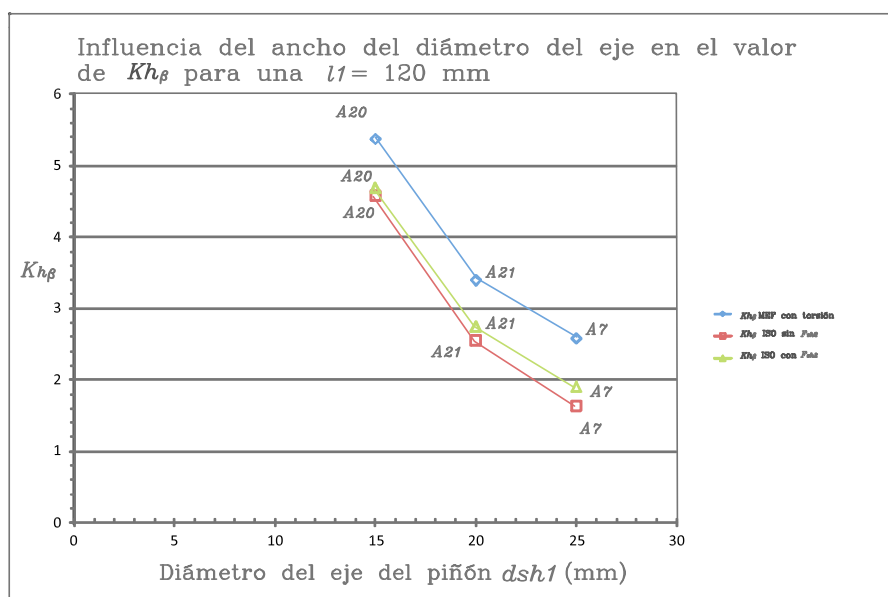


Figura 4.1.14: Influencia del diámetro del eje del piñón d_{sh1} en $K_{H\beta}$ para $l_1 = 120$ mm.

4.1.5. Análisis de la posición relativa de los engranajes en voladizo

La Tabla 4.1.10 muestra cuatro nuevos casos de diseño en los que los engranajes se encuentran en voladizo y se modifica su posición l_1 respecto a uno de los apoyos (véase la Fig. 4.1.15).

Tabla 4.1.10: Datos para los casos del A_{22} al A_{25} .

Casos	l_1 (mm)	T (N · m)
A_{22}	30	50
A_{23}	45	50
A_{24}	60	50
A_{25}	75	50

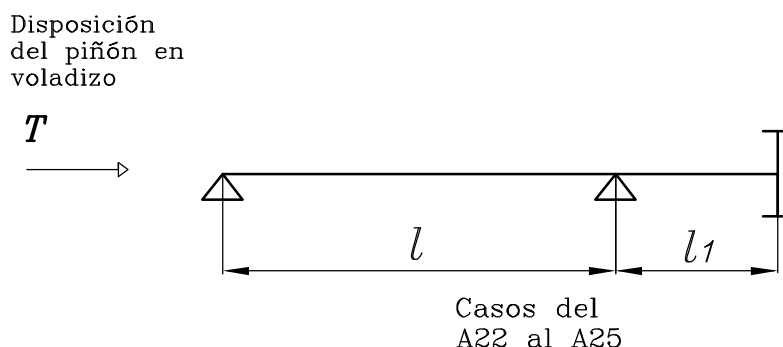


Figura 4.1.15: Disposición del piñón para los casos del A22 al A25.

Análisis del contacto para los casos del A22 al A25

Los resultados gráficos de la distribución de presiones a lo largo del ancho de cara del diente obtenidos por el método de los elementos finitos se encuentran en las Figuras de la 4.1.16 a la 4.1.23. Las diferencias en los resultados son apreciables por la variación existente entre unos casos y otros en la longitud y el color de la franja central, que representa la distribución de presiones. Obsérvese que el color rojo indica valores para la presión elevados mientras que el color azul marino indica ausencia de carga.

Las Figuras 4.1.16, 4.1.17, 4.1.18 y 4.1.19 corresponden a los casos con torsión y en ellas se advierte que conforme aumenta la distancia entre el piñón y el apoyo del eje, las huellas de contacto tienden a concentrarse en el extremo del ancho de cara del diente con valores más elevados de presión, lo cual queda reflejado en la franja de contacto del diente cuya superficie disminuye al pasar del caso A22 en la Figura 4.1.16 al A23 correspondiente a la Figura 4.1.19. Las Figuras 4.1.20, 4.1.21, 4.1.22 y 4.1.23 corresponden a los casos donde la torsión no se incluye en el análisis y en ellas se observa igualmente un aumento de las presiones de contacto en el extremo del ancho del diente del piñón cuando éste incrementa su distancia respecto al apoyo de referencia.

Si se procede a la comparación de las figuras que pertenecen al mismo caso, es decir, las que incluyen el efecto de la torsión y las que lo excluyen, se observa que la figura correspondiente a la de no torsión tiene una distribución de la carga más uniforme que la perteneciente al caso con torsión, lo cual se percibe por un área menor de la franja de presiones, y por una zona roja de máxima presión inferior (aunque visualmente no es tan fácil percibir la diferencia).

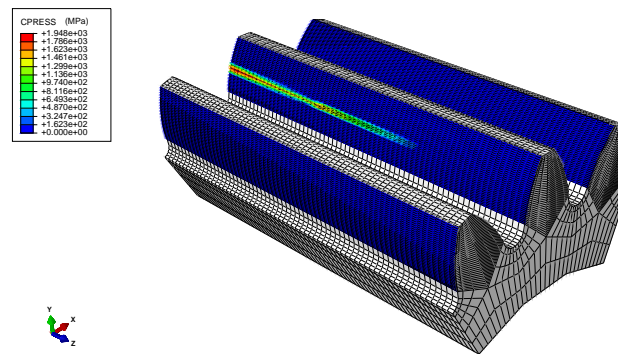


Figura 4.1.16: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{22} incluyendo el efecto de la torsión.

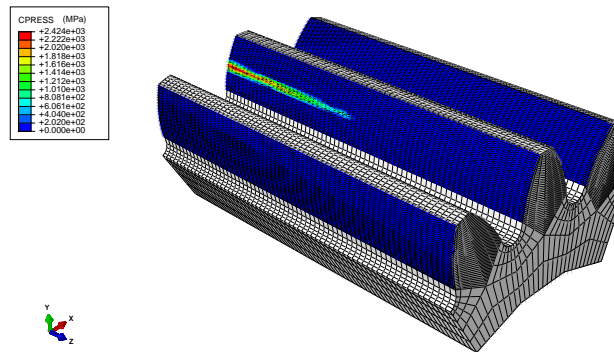


Figura 4.1.17: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{23} incluyendo el efecto de la torsión.

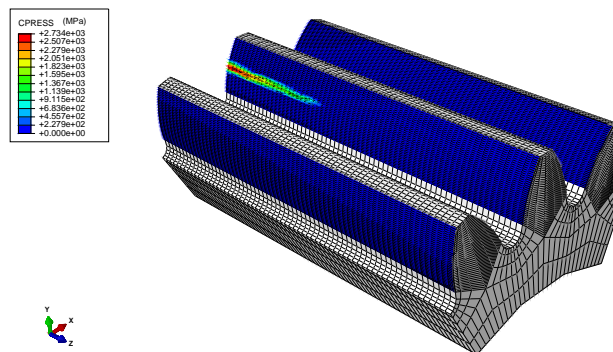


Figura 4.1.18: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{24} incluyendo el efecto de la torsión.

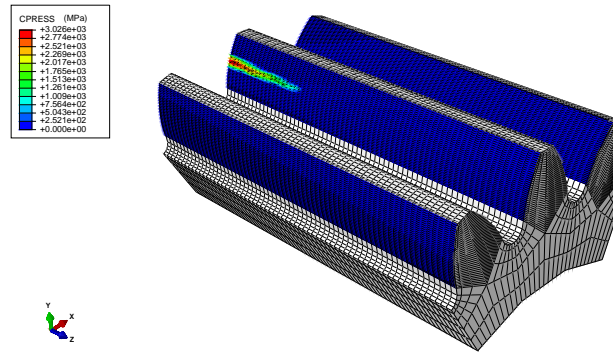


Figura 4.1.19: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{25} incluyendo el efecto de la torsión.

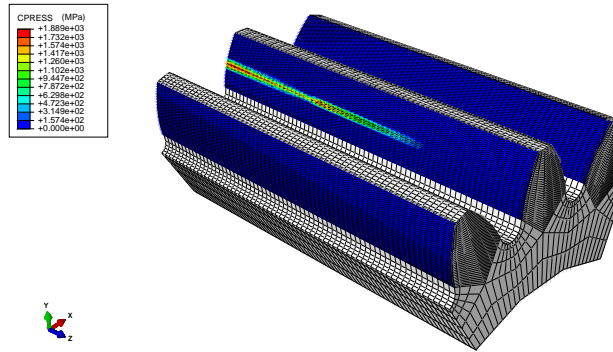


Figura 4.1.20: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{22} sin incluir el efecto de la torsión.

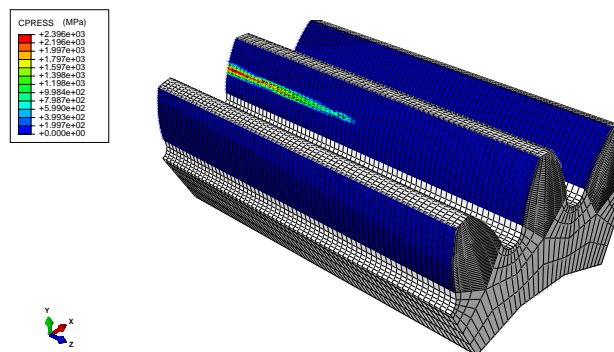


Figura 4.1.21: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{23} sin incluir el efecto de la torsión.

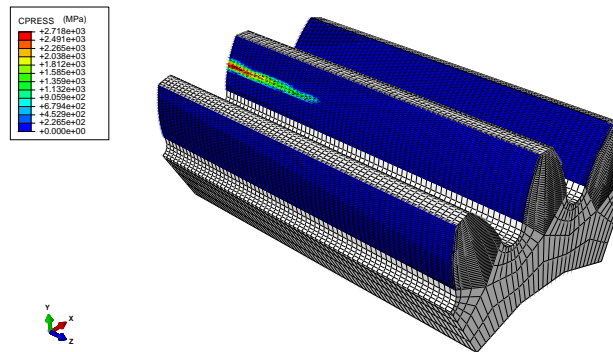


Figura 4.1.22: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{24} sin incluir el efecto de la torsión.

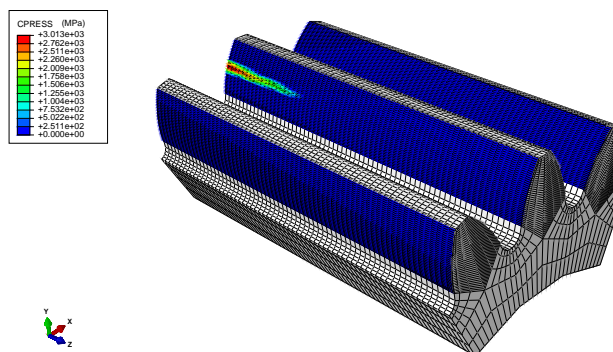


Figura 4.1.23: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso A_{25} sin incluir el efecto de la torsión.

Resultados y representación gráfica del factor $K_{H\beta}$ obtenidos para los casos del A_{22} al A_{25}

Los resultados que se obtuvieron se recogen en la Tabla 4.1.11 y se encuentran representados en la Figura 4.1.24, siendo su tendencia tanto para el Método C de la norma ISO como para el método de los elementos finitos la del incremento del factor $K_{H\beta}$ con el aumento de la distancia l_1 del piñón a uno de los apoyos. Este crecimiento se encuentra mucho más acentuado para el MEF. En la Tabla 4.1.11 y en la Figura 4.1.24 queda contemplado que para los casos del grupo A donde el piñón se encuentra en voladizo, los valores del factor $K_{H\beta}$ para el MEF en los que se incluye los efectos de la torsión son ligeramente superiores a los obtenidos por el mismo método pero sin tener en cuenta la torsión.

Tabla 4.1.11: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del A_{22} al A_{25} .

Casos estudiados	MEF con torsión	MEF sin torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
A_{22}	2.92758	2.76658	2.35063	2.70946
A_{23}	4.26720	4.16734	3.05370	3.53816
A_{24}	5.59695	5.52504	3.62281	4.20666
A_{25}	6.90212	6.84837	4.11393	4.78261

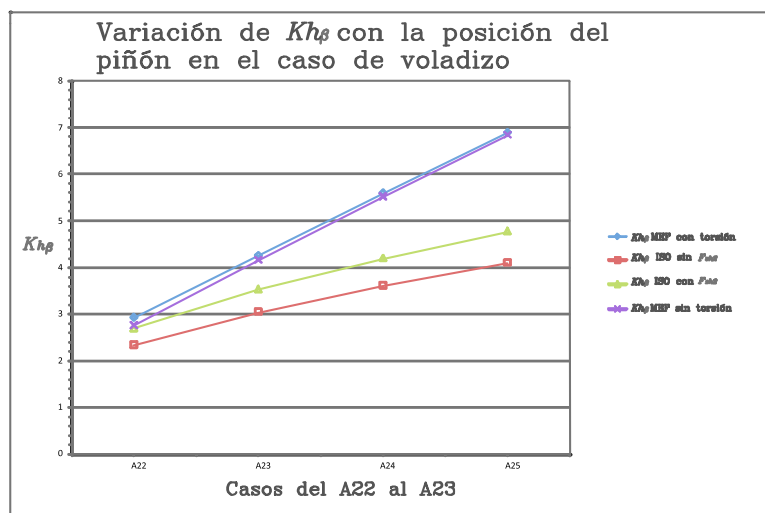


Figura 4.1.24: Variación $K_{H\beta}$ con la posición del piñón l_1 para disposición en voladizo.

4.2. Casos del grupo B

Los datos geométricos de las ruedas dentadas para este segundo grupo de casos quedan recogidos en la Tabla 4.2.12. Este grupo abarca 11 casos de diseño en los que se ha analizado:

- a) La posición relativa de los engranajes en el eje.
- b) La posición relativa de los engranajes en voladizo.

Tabla 4.2.12: Datos geométricos para el grupo de casos B.

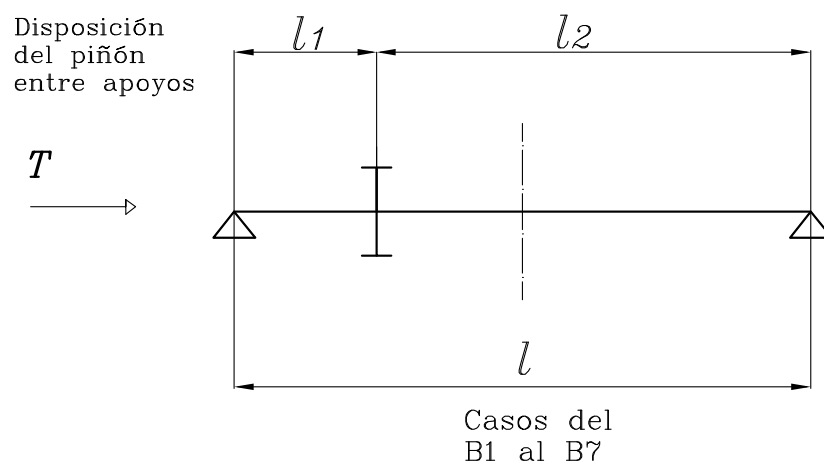
Variables	Valores
Módulo, m (mm)	3
Ancho de la cara del diente, b (mm)	40
Ángulo de presión, α ($^{\circ}$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	23
Nº de dientes de la rueda, N_2	97
Diámetro primitivo del piñón, d_1 (mm)	69
Diámetro primitivo de la rueda, d_2 (mm)	291
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} (mm)	25
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} (mm)	30

4.2.1. Análisis de la posición relativa de los engranajes en los ejes

En los casos del B_1 al B_7 se ha variado la posición de los engranajes a lo largo del eje con una longitud entre apoyos $l = 135 \text{ mm}$ (véase la Fig. 4.2.1), obteniéndose para cada disposición los valores de $K_{H\beta}$. Las distintas disposiciones estudiadas se muestran en la Tabla 4.2.13.

Tabla 4.2.13: Datos para los casos del B_1 al B_7 .

Casos	l_1 (mm)	l_2 (mm)	$T(\text{N} \cdot \text{m})$
B_1	22,5	112,5	100
B_2	37,5	97,5	100
B_3	52,5	82,5	100
B_4	67,5	67,5	100
B_5	82,5	52,5	100
B_6	97,5	37,5	100
B_7	112,5	22,5	100

Figura 4.2.1: Disposición del piñón para los casos del B_1 al B_7 .

Análisis del contacto para los casos del B_1 al B_7

La formación de la huella de contacto y la distribución de las presiones de contacto se han obtenido en los siete casos de diseño mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

Las Figuras 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 muestran la formación del contacto en los casos B_2 , B_4 y B_6 , respectivamente, teniendo en cuenta los efectos de la torsión. Las Figuras 4.2.5, 4.2.6 y 4.2.7 muestran la formación del contacto en los mismos casos, respectivamente, pero sin tener en cuenta los efectos de la torsión.

Los comentarios de los resultados obtenidos para los siete primeros casos del grupo B en lo que respecta a la formación de la huella de contacto y la distribución de las presiones de contacto, podrían ser similares a las realizadas en los casos del grupo A.

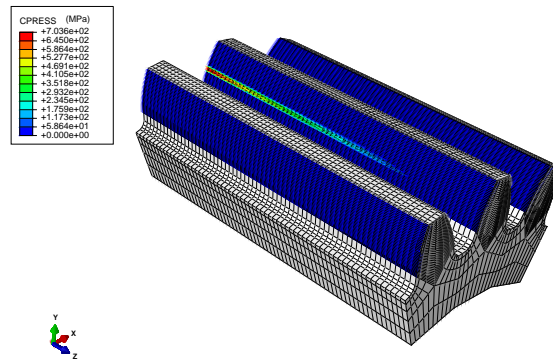


Figura 4.2.2: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_2 incluyendo el efecto de la torsión.

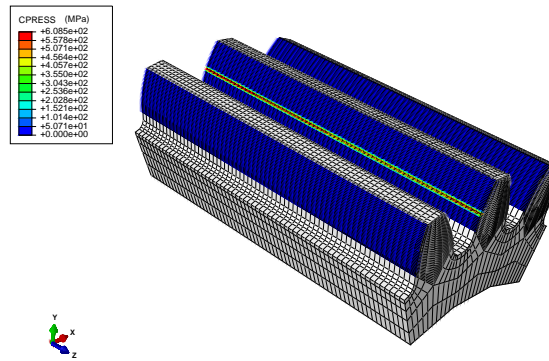


Figura 4.2.3: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_4 incluyendo el efecto de la torsión.

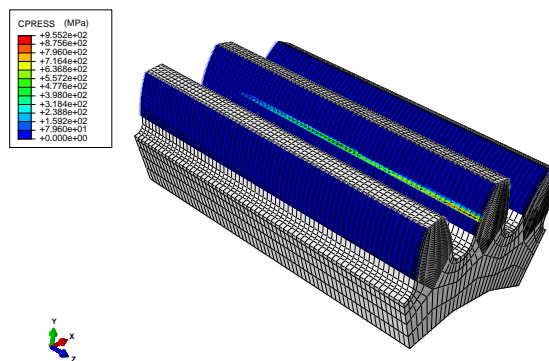


Figura 4.2.4: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_6 incluyendo el efecto de la torsión.

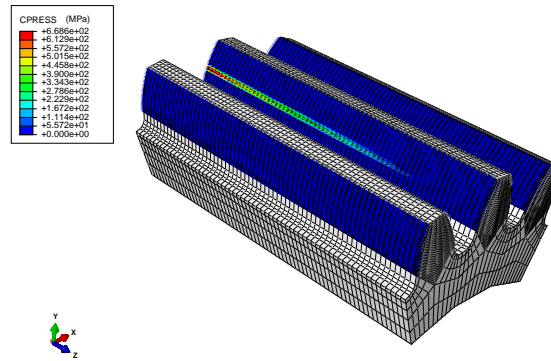


Figura 4.2.5: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_2 sin incluir el efecto de la torsión.

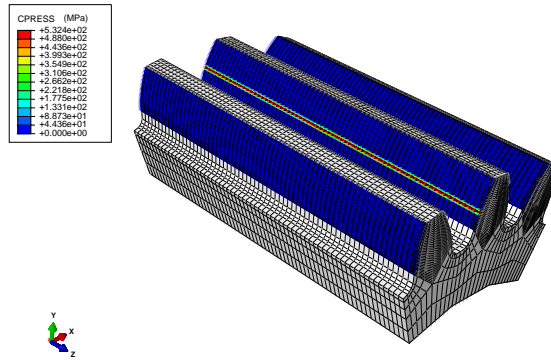


Figura 4.2.6: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_4 sin incluir el efecto de la torsión.

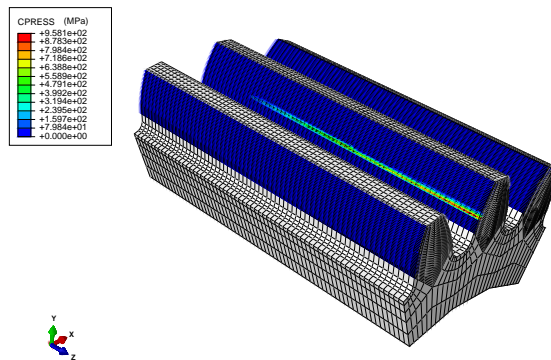


Figura 4.2.7: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_6 sin incluir el efecto de la torsión.

Resultados y representación gráfica del factor $K_{H\beta}$ obtenidos para los casos del B_1 al B_7

La Tabla 4.2.14 muestra los valores del factor $K_{H\beta}$ para los siete casos de diseño del B_1 al B_7 , obtenidos por el Método C de la norma ISO y el método de los elementos finitos.

Tabla 4.2.14: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del B_1 al B_7 .

Casos estudiados	MEF con torsión	MEF sin torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
B_1	2.41276	2.29861	3.58046	4.16352
B_2	2.56613	2.42629	2.94337	3.41637
B_3	2.08417	1.92031	2.12300	2.45117
B_4	1.16189	1.01083	1.08771	1.09142
B_5	1.92464	1.93714	2.00398	2.35326
B_6	2.40900	2.41372	2.85871	3.34682
B_7	2.27775	2.28756	3.51120	4.10664

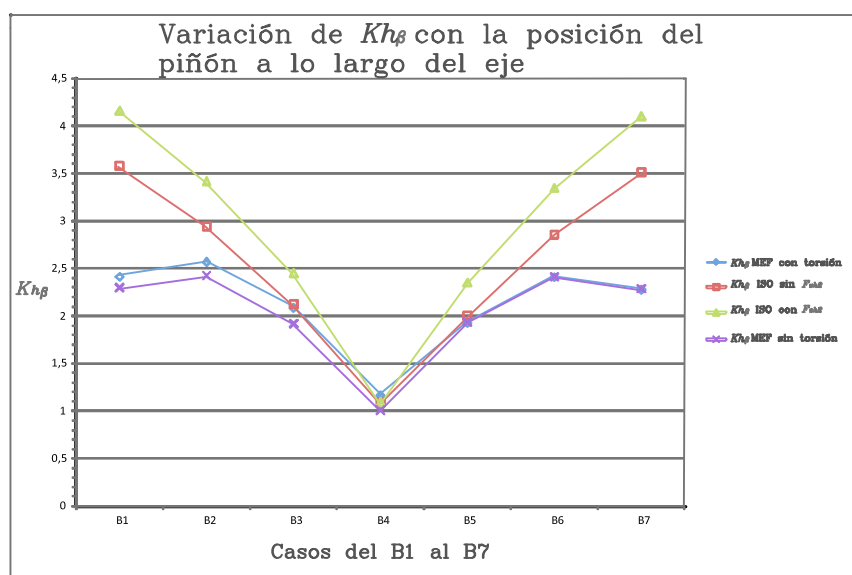


Figura 4.2.8: Variación de $K_{H\beta}$ con la posición del piñón a lo largo del eje.

La primera diferencia que se observa respecto a los casos del grupo A es que los valores del

factor $K_{H\beta}$ obtenidos por el método de los elementos finitos con y sin los efectos de la torsión son muy similares. La segunda diferencia es que los valores obtenidos con el MEF son inferiores a los obtenidos por el Método C de la norma ISO.

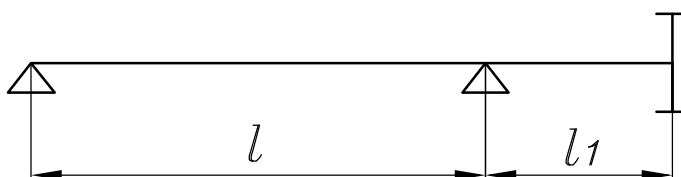
La Figura 4.2.8 muestra los valores del factor $K_{H\beta}$ para los siete primeros casos del grupo B. Se confirma que los valores que se obtienen por el Método C de la norma ISO para el factor $K_{H\beta}$ son superiores a los obtenidos por el método de los elementos finitos (tal y como se ha mencionado en el párrafo anterior), acentuándose más esta diferencia para los casos B_1 y B_7 donde el piñón se encuentra más alejado del punto medio del eje. Por otro lado, también se puede observar que el factor $K_{H\beta}$ para parejas de posiciones simétricas de los engranajes respecto a la mitad del eje, tienden a ser levemente superiores para las situaciones del piñón en la mitad próxima a la zona de aplicación del par torsor. Esta asimetría se debe a los efectos de la torsión y se aprecia en las curvas obtenidas para los resultados del Método C y del MEF en el caso que se incluye la torsión, mientras que para el MEF sin torsión los resultados son simétricos para las dos partes del eje. En el caso B_4 donde los engranajes se sitúan en la mitad del eje, el valor de $K_{H\beta}$ se aproxima a uno para los cuatro tipo de análisis realizados, y esto es lógico pues la distribución de presiones es prácticamente uniforme a lo largo de todo el ancho de cara del diente.

4.2.2. Análisis de la posición relativa de los engranajes en voladizo

La Tabla 4.2.15 muestra cuatro nuevos casos B_8, B_9, B_{10}, B_{11} correspondientes a la posición en voladizo de los engranajes y en los que se modifica su posición l_1 con respecto a uno de los apoyos del eje (véase la Fig. 4.2.9).

Disposición
del piñón en
voladizo

T



Casos del
B8 al B11

Figura 4.2.9: Disposición del piñón para los casos del B_8 al B_{11} .

Tabla 4.2.15: Datos para los casos del B_8 al B_{11} .

Casos	l_1 (mm)	T (N · m)
B_8	50	100
B_9	55	100
B_{10}	60	100
B_{11}	65	100

Análisis del contacto para los casos del B_8 al B_{11}

El análisis del contacto obtenido por el método de los elementos finitos para el piñón en voladizo se muestra en las Figuras 4.2.10 y 4.2.11 correspondientes a los casos B_9 y B_{11} , respectivamente. Se observa cómo para el segundo caso las presiones en la superficie producidas por el contacto entre las ruedas dentadas tienden a concentrarse en la zona extrema del ancho del diente. Esto es lógico debido a que es el caso más alejado del apoyo y por tanto el más desfavorable para que la distribución de la carga sea uniforme.

Si ahora se comparan los casos con los efectos de torsión y sin torsión, es decir, la Figura 4.2.10 con la 4.2.12, y la Figura 4.2.11 con la 4.2.13, se puede observar que apenas existen diferencias apreciables.

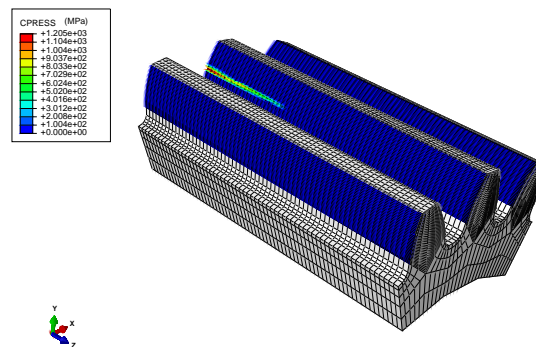


Figura 4.2.10: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_9 incluyendo el efecto de la torsión.

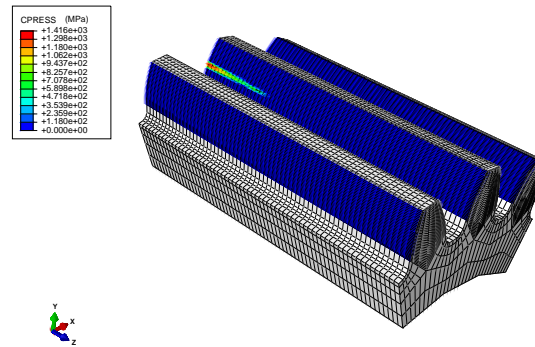


Figura 4.2.11: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_{11} incluyendo el efecto de la torsión.

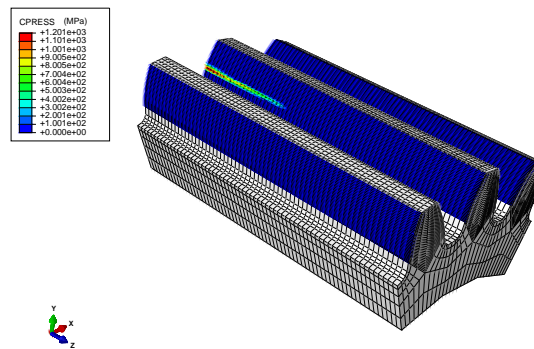


Figura 4.2.12: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_9 sin incluir el efecto de la torsión.

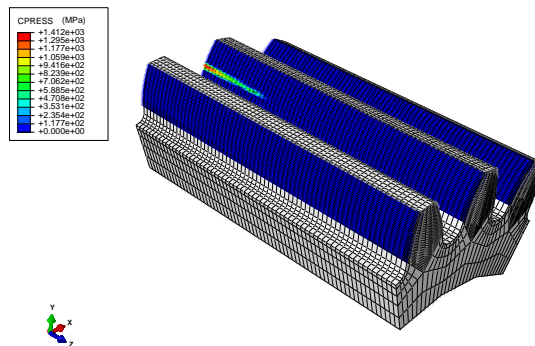


Figura 4.2.13: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso B_{11} sin incluir el efecto de la torsión.

Resultados y representación gráfica del factor $K_{H\beta}$ obtenidos para los casos del B_8 al B_{11}

Los resultados obtenidos para estos cuatro casos en voladizo del factor $K_{H\beta}$ se encuentran incluidos en la Tabla 4.2.16 y representados en la Figura 4.2.14. Éstos son bastante elevados si se comparan con los siete primeros casos del grupo B.

Tabla 4.2.16: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del B_8 al B_{11} .

Casos estudiados	MEF con torsión	MEF sin torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
B_8	4.81173	4.77091	4.83566	5.63287
B_9	5.65361	5.62152	5.21751	6.07947
B_{10}	6.47723	6.44895	5.57326	6.49544
B_{11}	7.29956	7.27678	5.90762	6.88632

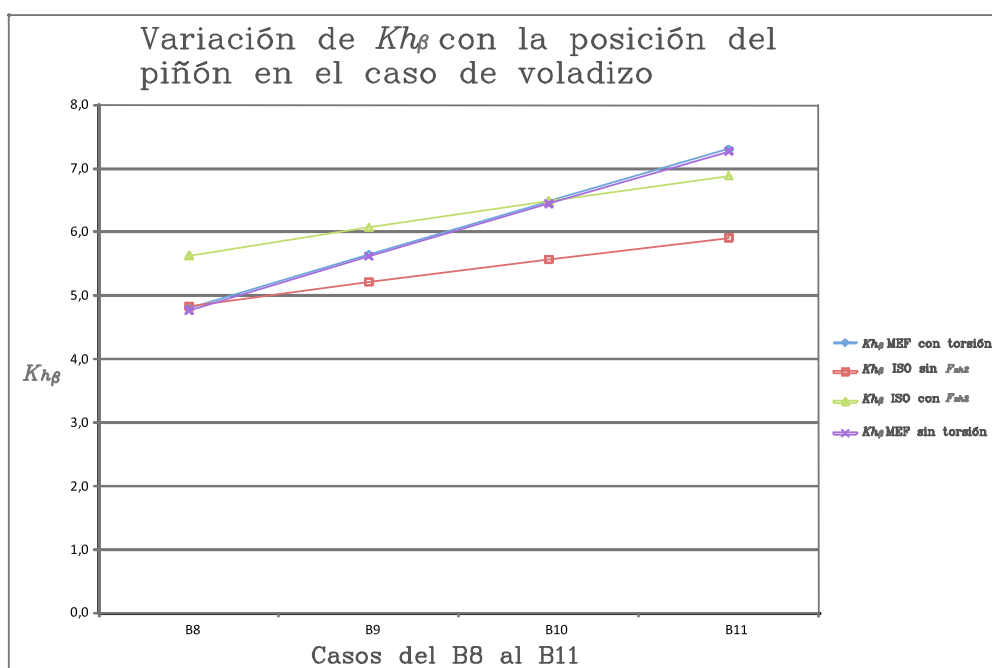


Figura 4.2.14: Variación de $K_{H\beta}$ con la posición del piñón en voladizo.

La Figura 4.2.14 muestra que $K_{H\beta}$ aumenta al ir aumentando l_1 , por lo que la carga se distribuye

de forma menos uniforme conforme se aleja el piñón del apoyo. Aunque los dos métodos utilizados coinciden en lo anterior, las pendientes de las curvas en ambos casos difieren, siendo mayor la pendiente correspondiente a los casos del método de los elementos finitos que la perteneciente al Método C de la norma ISO. Se puede destacar también que para longitudes l_1 menores la norma ISO resulta más conservadora, mientras que para longitudes l_1 mayores el MEF obtiene valores del factor superiores. Por otro lado, para estos cuatro casos en voladizo los resultados de la Tabla 4.2.16 para el MEF con y sin torsión son muy similares.

Finalmente añadir que las curvas correspondientes al MEF con y sin torsión de la gráfica de la Figura 4.2.14 son muy próximas.

4.3. Casos del grupo C

Los datos geométricos de las ruedas dentadas para este segundo grupo de casos quedan recogidos en la Tabla 4.3.17. Este grupo abarca 13 casos de diseño en los que se ha analizado:

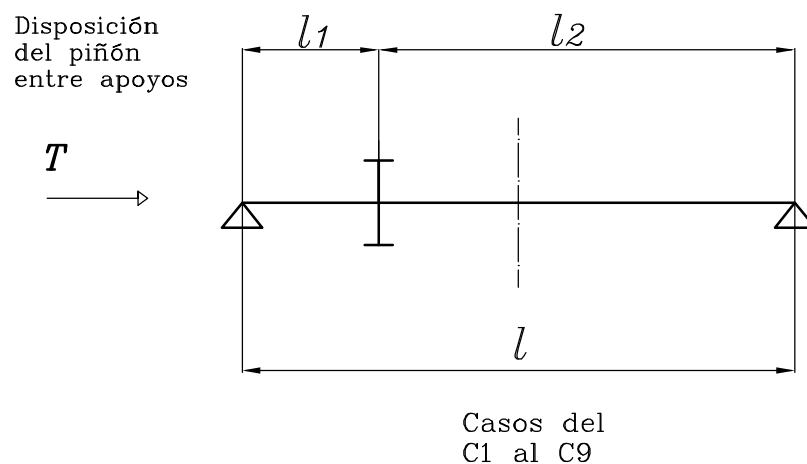
- a) La posición relativa de los engranajes en el eje.
- b) La posición relativa de los engranajes en voladizo.

Tabla 4.3.17: Datos geométricos para los casos del grupo C.

Variables	Valores
Módulo, m (mm)	1,5
Ancho de la cara del diente, b (mm)	20
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	25
Nº de dientes del piñón, N_1	20
Nº de dientes de la rueda, N_2	51
Diámetro primitivo del piñón, d_1 (mm)	30
Diámetro primitivo de la rueda, d_2 (mm)	76,5
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} (mm)	25
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} (mm)	30

4.3.1. Análisis de la posición relativa de los engranajes en los ejes

En los casos del C_1 al C_9 se ha variado la posición de los engranajes a lo largo del eje con una longitud entre apoyos $l = 65 \text{ mm}$ (véase la Fig. 4.3.1), obteniéndose para cada disposición los valores de $K_{H\beta}$. Las distintas disposiciones estudiadas se muestran en la Tabla 4.3.18.

Figura 4.3.1: Disposición del piñón para los casos del C_1 al C_{13} .Tabla 4.3.18: Datos para los casos del C_1 al C_9 .

Casos	l_1 (mm)	l_2 (mm)	$T(\text{N} \cdot \text{m})$
C_1	12,5	52,5	50
C_2	17,5	47,5	50
C_3	22,5	42,5	50
C_4	27,5	37,5	50
C_5	32,5	32,5	50
C_6	37,5	27,5	50
C_7	42,5	22,5	50
C_8	47,5	17,5	50
C_9	52,5	12,5	50

Análisis del contacto para los casos del C_1 al C_9

La formación de la huella de contacto y la distribución de las presiones de contacto se han obtenido en los nueve casos de diseño mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

Las Figuras 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4 muestran la formación del contacto en los casos C_1 , C_5 y C_9 , respectivamente, teniendo en cuenta los efectos de la torsión. Las Figuras 4.3.5, 4.3.6 y 4.3.7 muestran la formación del contacto en los mismos casos, respectivamente, pero sin tener en cuenta los efectos de la torsión.

Las diferencias entre las Figuras 4.3.2 y 4.3.5, 4.3.3 y 4.3.6, y 4.3.4 y 4.3.7, no son apreciables, por lo que habría que recurrir a los valores numéricos obtenidos para el factor $K_{H\beta}$ que se encuentran recogidos en el apartado siguiente. En todos los casos la huella de contacto ocupa todo el ancho de la cara del diente.

Por otro lado, si se observa en concreto las Figuras 4.3.3 y 4.3.6, se observa que en la primera la distribución de presiones no es del todo uniforme como cabía esperar por ser el caso C_5 . En la segunda figura sí se observa una distribución de la carga uniforme lo cual supondría un valor de $K_{H\beta}$ cercano a la unidad. Éstas diferencias se deben al efecto de la torsión.

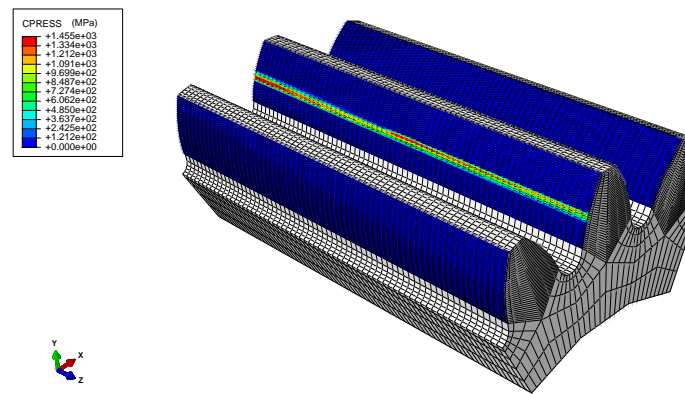


Figura 4.3.2: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_1 incluyendo el efecto de la torsión.

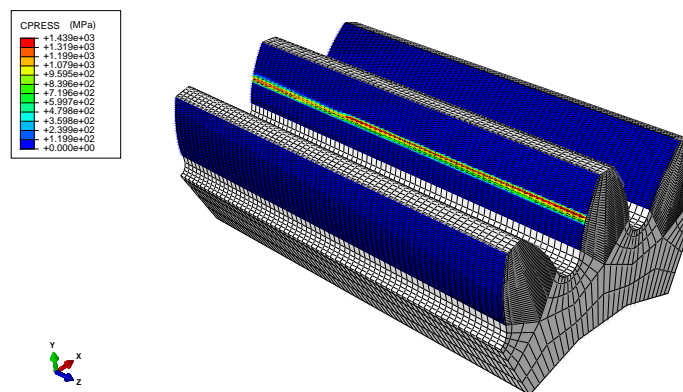


Figura 4.3.3: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_5 incluyendo el efecto de la torsión.

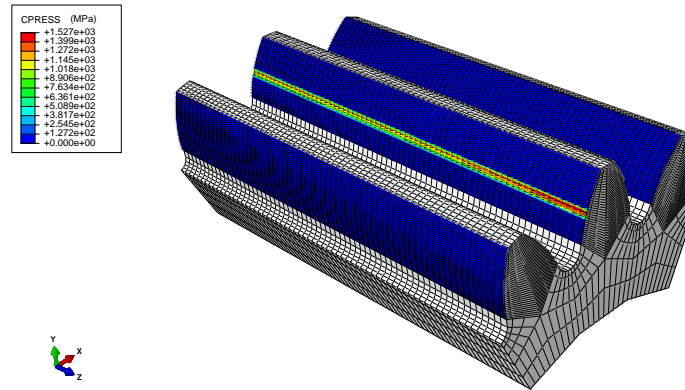


Figura 4.3.4: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_9 incluyendo el efecto de la torsión.

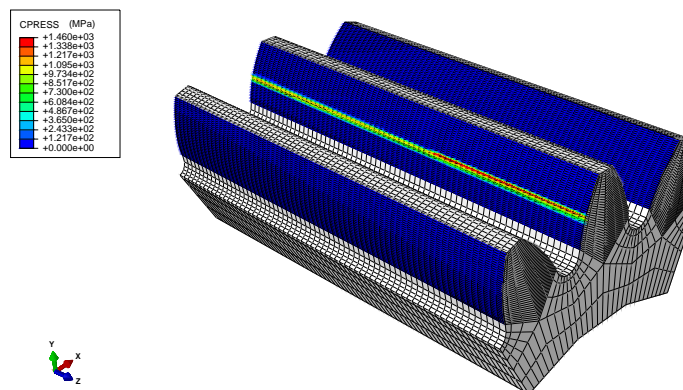


Figura 4.3.5: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_1 sin incluir el efecto de la torsión.

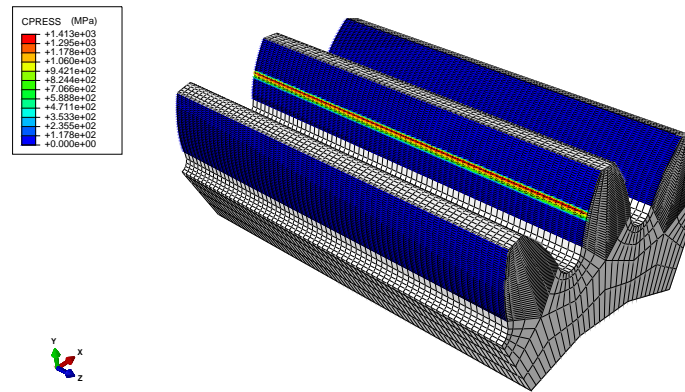


Figura 4.3.6: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_5 sin incluir el efecto de la torsión.

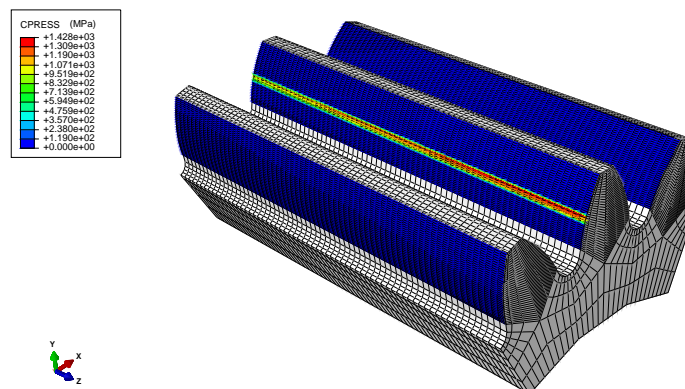


Figura 4.3.7: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_9 sin incluir el efecto de la torsión.

Resultados y representación gráfica del factor $K_{H\beta}$ obtenidos para los casos del C_1 al C_9

La Tabla 4.3.19 muestra los valores de $K_{H\beta}$ para los casos del C_1 al C_9 obtenidos a partir del método de los elementos finitos y del Método C de la norma ISO. La Figura 4.3.8 muestra la variación de $K_{H\beta}$ con la posición de los engranajes en los ejes.

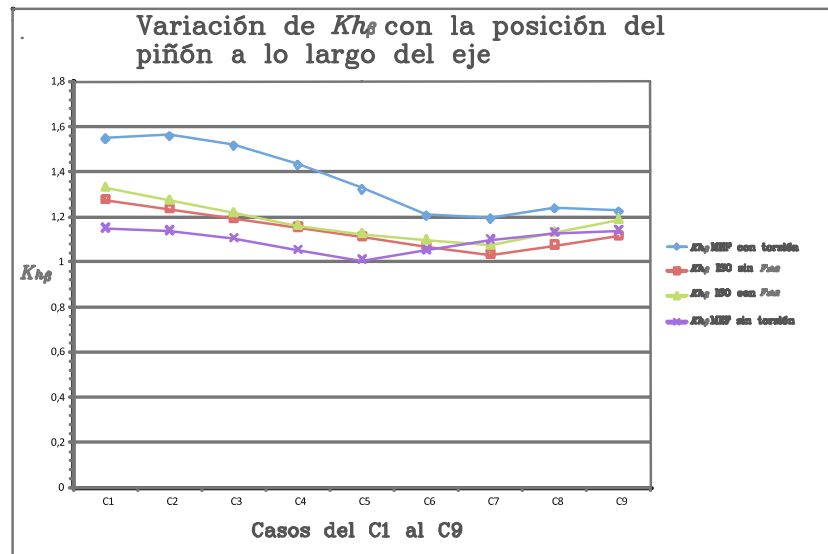
Tabla 4.3.19: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del C_1 al C_9 .

Casos estudiados	MEF con torsión	MEF sin torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
C_1	1.54632	1.15351	1.27988	1.33442
C_2	1.55995	1.14205	1.23861	1.27819
C_3	1.51661	1.10847	1.19734	1.22196
C_4	1.43103	1.05700	1.15608	1.16573
C_5	1.32230	1.01286	1.11481	1.12808
C_6	1.20595	1.05610	1.07354	1.10178
C_7	1.19351	1.10146	1.03661	1.07981
C_8	1.23858	1.13299	1.07787	1.13604
C_9	1.22416	1.14403	1.11914	1.19227

En la Figura 4.3.8 se puede observar que los valores obtenidos por el MEF con el modelo de torsión se encuentran por encima de los correspondientes al método C de la norma ISO y del MEF sin incluir los efectos de la torsión. Por otro lado, los resultados obtenidos por el Método C con f_{sh2} son superiores a los correspondientes al MEF con el modelo sin torsión, a excepción del caso C_7 . Además, tal y como ocurría en los grupos anteriores, tanto la norma ISO como el MEF con torsión presenta asimetría en los valores de $K_{H\beta}$, mientras que para el MEF sin torsión los resultados para dicho factor tienen una tendencia simétrica.

Otra observación a destacar de la Figura 4.3.8 es que, así como en todos los casos anteriores la posición para la que se obtenía un mínimo de $K_{H\beta}$ era la central del eje, para este conjunto de casos el valor mínimo de $K_{H\beta}$ corresponde a C_7 para el MEF con torsión y el Método C de la norma ISO. Sin embargo, se tiene que para el MEF sin torsión el mínimo tiene lugar para el caso C_5 .

La tendencia de los valores de $K_{H\beta}$ para el Método C de la norma ISO coincide de forma aproximada con la del MEF con torsión, aunque esta última se encuentra por encima de aquella. Añadir que los valores de $K_{H\beta}$ correspondientes a estos nueve casos del grupo C no son muy elevados y oscilan entre 1,1 y 1,6.

Figura 4.3.8: Variación de $K_{H\beta}$ con la posición del piñón a lo largo del eje.

4.3.2. Análisis de la posición relativa de los engranajes en voladizo

La Tabla 4.3.20 muestra cuatro nuevos casos C_{10} , C_{11} , C_{12} , C_{13} , correspondientes a la posición de los engranajes en voladizo, donde se modifica la posición l_1 con respecto a uno de los apoyos del eje (véase la Fig. 4.3.9).

Tabla 4.3.20: Datos para los casos del C_{10} al C_{13} .

Casos	l_1 (mm)	T (N · m)
C_{10}	25	50
C_{11}	30	50
C_{12}	35	50
C_{13}	40	50

Análisis del contacto para los casos del C_{10} al C_{13}

Al comparar la Figura 4.3.10 con la 4.3.11 correspondientes a los casos C_{10} y C_{12} respectivamente, se observa que en la segunda figura la distribución de la presión en la superficie del diente no es uniforme, tendiendo a concentrarse los valores máximos en el extremo del mismo.

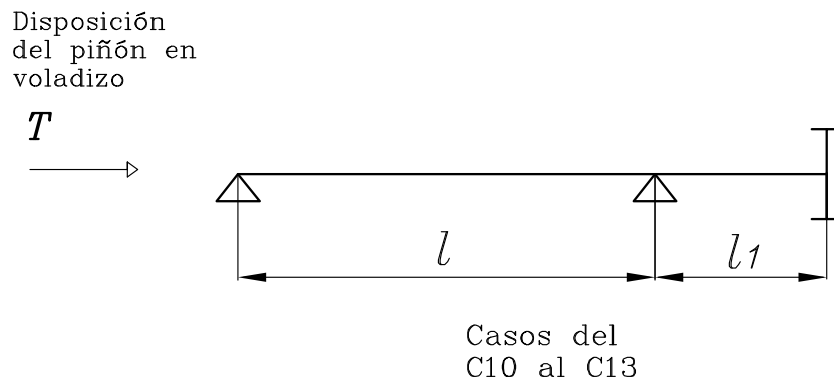


Figura 4.3.9: Disposición del piñón para los casos del C_{10} al C_{13} .

Al comparar la Figura 4.3.10 con la 4.3.12 (correspondientes al caso C_{10} con y sin torsión) y la Figura 4.3.11 con la 4.3.13 (correspondientes al caso C_{12} con y sin torsión), se puede observar que para los ejemplos en los que los análisis se han realizado incluyendo los efectos de torsión, la distribución de la presión es menos uniforme que para los casos sin torsión. En cualquier caso, las diferencias no son excesivamente elevadas.

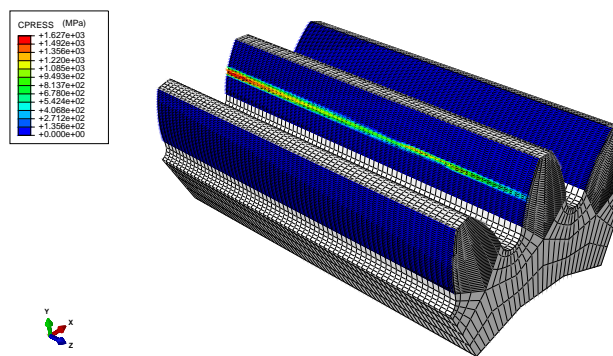


Figura 4.3.10: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_{10} incluyendo el efecto de la torsión.

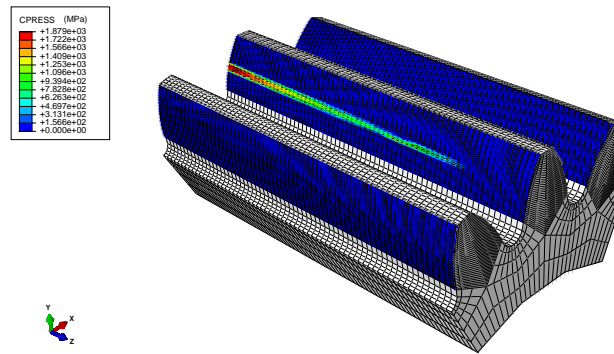


Figura 4.3.11: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_{12} incluyendo el efecto de la torsión.

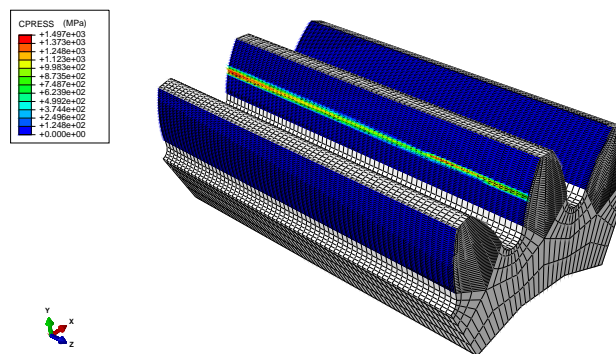


Figura 4.3.12: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_{10} sin incluir el efecto de la torsión.

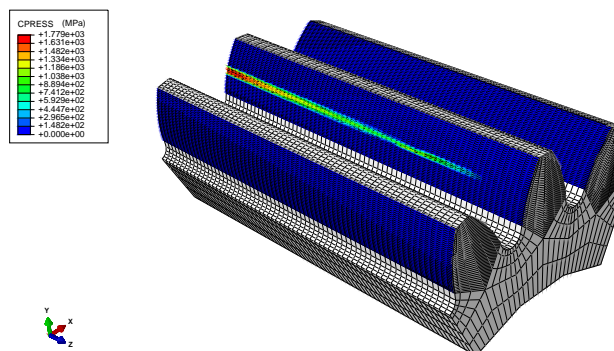


Figura 4.3.13: Distribución de las presiones a lo largo del ancho de cara del diente para el caso C_{12} sin incluir el efecto de la torsión.

Resultados y representación gráfica del factor $K_{H\beta}$ obtenidos para los casos del C_{10} al C_{13}

La Tabla 4.3.21 muestra los valores de $K_{H\beta}$ para los casos C_{10} , C_{11} , C_{12} y C_{13} obtenidos por el método de los elementos finitos y el Método C de la norma ISO. La Figura 4.3.14 muestra la variación de $K_{H\beta}$ con la distancia del piñón al apoyo.

Tabla 4.3.21: Valores de $K_{H\beta}$ para los casos del C_{10} al C_{13} .

Casos estudiados	MEF con torsión	MEF sin torsión	Método C sin f_{sh2}	Método C con f_{sh2}
C_{10}	1.92123	1.64255	1.81252	1.93158
C_{11}	2.18125	1.93720	1.92686	2.08556
C_{12}	2.45784	2.24994	2.04078	2.22997
C_{13}	2.77795	2.59220	2.14992	2.36558

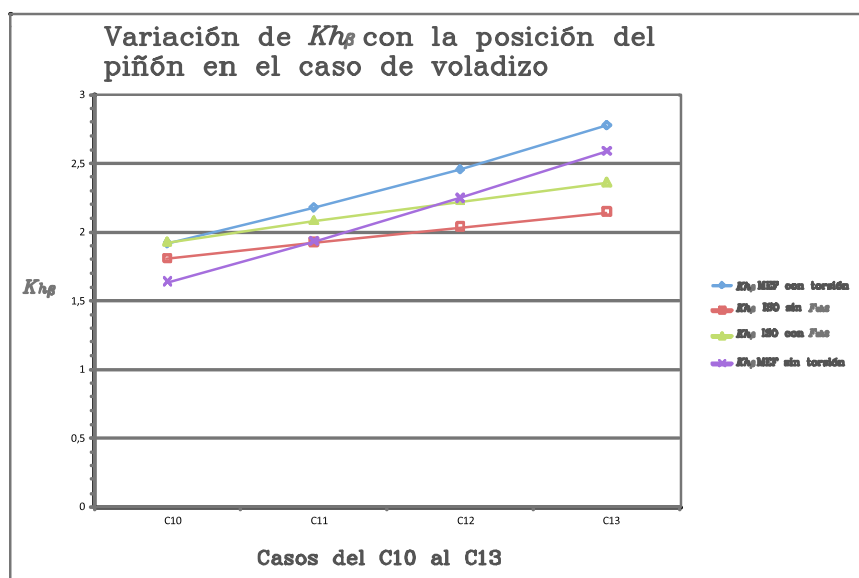


Figura 4.3.14: Variación de $K_{H\beta}$ con la posición del piñón en voladizo.

La Figura 4.3.14 muestra la tendencia de los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos y los resultados obtenidos por el Método C de la norma ISO. Se observa que los valores de $K_{H\beta}$ aumentan con el aumento de la distancia al apoyo de referencia l_1 . Se observa

que las pendientes de las curvas correspondientes al método de los elementos finitos difieren de las correspondientes al Método C de la norma ISO, siendo mayor las obtenidas por el método de los elementos finitos.

De forma general, los valores del factor $K_{H\beta}$ correspondientes al MEF con modelo de torsión se encuentran por encima de los obtenidos mediante el Método C de la norma ISO y del MEF sin torsión, siendo los resultados más próximos entre sí para valores de l_1 más pequeños. Una excepción de lo anterior es el caso C_{10} , donde el valor para $K_{H\beta}$ obtenido mediante el Método C en el que se tiene en cuenta el f_{sh2} , se encuentra por encima del arrojado por el método de los elementos finitos (tanto con y sin torsión). Para el resto de casos, los resultados del MEF con torsión se encuentran por encima de los otros valores obtenidos pero sin que existan unas diferencias entre sí excesivamente notables. Estas diferencias entre los resultados de los distintos métodos se acentúan gradualmente conforme el piñón aumenta su distancia al apoyo de referencia.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente proyecto se han desarrollado dos modelos de elementos finitos que permiten tener en cuenta la deflexión de los ejes y la deformación torsional de las superficies de los dientes y del cuerpo de los engranajes en la formación del contacto. El desarrollo del presente proyecto ha permitido establecer las siguientes conclusiones:

- Se ha establecido un procedimiento para la determinación en engranajes cilíndricos rectos del factor de distribución longitudinal de la carga a partir de los análisis por el método de los elementos finitos, midiendo de esta manera el grado de no uniformidad en la distribución de la carga a lo largo del ancho de cara.
- La deflexión angular de los ejes contribuye a un reparto no uniforme de la carga sobre la superficie de los dientes. La deformación torsional de las superficies de los dientes y del cuerpo de los engranajes acentúa ese reparto no uniforme de la carga.
- Se ha observado una tendencia creciente con un máximo relativo en el valor del factor de distribución longitudinal de la carga al desplazar los engranajes desde la posición central entre apoyos hacia éstos. La existencia de un máximo relativo se explica por la presencia de dos efectos contrapuestos al desplazar la posición de los engranajes: (1) la deflexión angular aumenta para una deformación del eje dada, (2) la carga transmitida está más cerca del apoyo por lo que la deformación del eje disminuye. Este máximo relativo no es detectado con el Método C de la norma ISO, aún teniendo lugar dentro del intervalo de aplicación de dicho método.
- El modelo de elementos finitos que tiene en cuenta la deformación torsional de las superficies de contacto y de los cuerpos de los engranajes proporciona valores diferentes del factor de distribución longitudinal de la carga para posiciones simétricas de los engranajes respecto a la posición central entre apoyos. Esta circunstancia también aparece en los resultados obtenidos al aplicar el Método C de la norma ISO. En general se observan valores mayores del factor

de distribución longitudinal de la carga para posiciones de los engranajes en la mitad del eje del piñón más cercana al extremo donde entra la potencia.

- Se ha observado una tendencia creciente en el valor del factor de distribución longitudinal de la carga para el caso de engranajes en voladizo al alejar la posición de éstos del apoyo.
- Se ha observado que existen casos de diseño en los que el Método C de la norma ISO es más conservador al proporcionar valores del factor de distribución longitudinal de la carga mayores que los obtenidos con el método de los elementos finitos. Sin embargo, también se han observado casos en los que el Método C de la norma ISO no es conservador, especialmente si la relación entre el ancho de cara y la distancia entre apoyos es muy baja.
- Se ha observado un peso importante de la deformación torsional respecto a la deflexión del eje en el valor del factor de distribución longitudinal de la carga para relaciones entre el diámetro del eje y el diámetro primitivo del engranaje elevados (casos de ejes con dientes tallados en los mismos). Esta circunstancia no es valorada suficientemente por el Método C de la norma ISO.
- Se ha observado que el valor del factor de distribución longitudinal de la carga obtenido por el método de los elementos finitos y el Método C de la norma ISO, aumenta levemente con el incremento del par torsor.

Bibliografía

- [1] F.L. Litvin, A. Fuentes, Gear Geometry and Applied Theory, 2nd Edition, Cambridge University Press, New York (USA), 2004.
- [2] Standard ISO 6336-1. Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gear-Part 1: Basic Principles, Introduction and General Influence Factor, *International Standards Organisation*, 2006.
- [3] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., The Finite Element Method, 5a. Edn., Jonh Wiley & Sons, 2000.
- [4] I. Atanasovska, V. Nikolic, 3D Spur Gear FEM model for the numerical calculation of face load factor, *Mechanics, Automatic Control and Robotics* 6 (1) 2006, 131 143.
- [5] S. Li, Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications, *Mechanism and Machine Theory* 42 (1) 2007, 88 114.
- [6] Y. C. Chen, C. C. Liu, Contact stress analysis of concave conical involute gear pairs with non-parallel axes, *Finite Elements in Analysis and Design* 47 (4) 2011, 443 452.
- [7] Argyris, L., Fuentes, A. & Litvin, F. L., Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears, *Journal Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 1057-1095, 2002.
- [8] ANSI/AGMA 2001-D04. Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth, *American Gear Manufactures Association*, 2004.
- [9] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., ABAQUS/Standard User's Manual, 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860-4847, 1998.
- [10] V. Roda-Casanova, J.L. Iserte-Vilar, F. Sanchez-Marin, A. Fuentes, I. Gonzalez-Perez, Development and comparison of shaft-gear models for the computation of gear-misalignments due to power transmission, *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences Washington*, 2011.

- [11] P. Lafont, A. Diaz, J. Echavarri, Diseño y Cálculo de Transmisiones por Engranajes, *Universidad Politécnica de Madrid*, 2009.